Érzékenységvizsgálat

Érzékenység vizsgálat bevezetés

Lineáris programozási feladatainkban felvetdhet a kérdés, hogy egy adott megoldás, vagy megoldás struktúra, - vagyis hogy ugyanazon termékek gyártása biztosítja továbbra is az optimális megoldást - milyen változások mellett tartható meg, mikor kell újabb megoldást keresni, termék struktúrát bevezetni.
Ezen kérdéskörrel foglalkozik az érzékenység vizsgálat témaköre, mely a paramétereknek a megoldások milyenségére történ hatásának a vizsgálatára ad egy a hallgatók számára hasznos, jó példát. Nem csak azért hasznos, mert ennek keretében részletesen alkalmuk lesz ilyen vizsgálatot végigcsinálni, - úgy kézi számítással mint Maple utasítások segítségével - , hanem talán még inkább azért, mert így megérthet más, akár nem lineáris esetekre az érzékenység vizsgálat fogalma.
Az anyag olvasásakor nem szükséges a Maple utasítások megismerése használata, de az olvasó számára - a hosszan leírt kézi számolások okán - gyorsan nyilvánvalóvá válik, hogy használatuk nem csak nagyon hasznos, de nagyon egyszer is. Hasznos még ez a témakör azon okból is hogy kisebb elméleti levezetést igényel, mely bázisán alakul ki az algoritmus, vagyis a számítási technika.

Érzékenység vizsgálat elméleti levezetés

Egy már megoldott LP feladatban a megoldás ismeretében az induló táblában csoportosítsuk a sorokat (u_i) és az oszlopokat (x_i) úgy, hogy vegyük elre azokat amelyek részt vettek a báziscserében ("generálás"-ban). Belátható, hogy ez megvalósítható, mivel az induló táblában a Szimplex megoldás megkezdése eltt a sorok és oszlopok cseréje megengedett. Indokolhatjuk ezen cserék jogosságát még azzal is, hogy a változók sorrendje a modell felállításnál (melyik lesz az x_1 és melyik x_2) csak a modell alkotó döntésétl függ.
Tegyük meg - az optimális tábla tapasztalata alapján - ezt a cserét azzal a körül tekintéssel, hogy a báziscsere elemek rendre a fátló elemei legyenek. (Ennek megvalósíthatóságát a továbbiakban nem bizonyítjuk csak egy példával támasztjuk alá). Ezáltal az induló táblánkat tulajdonképpen partícionáltuk (részekre osztottuk): a báziscserében részt vev, ill. részt nem vev részekre. Általános matematikai jelöléssel ekkor a korábbi induló tábla alak

$$\begin{bmatrix} 1. & \underline{x}^T_1 & b \\ u_1 & \underline{A} & \underline{b} \\ -z & \underline{c}_2 & 0 \end{bmatrix}$$

helyett az alábbi alakot kapjuk az induló táblára:

$$\begin{bmatrix} 1. & \underline{x}^T_1 & \underline{x}^T_2, 3 & \underline{b} \\ \underline{u}_1 & \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} & \underline{b}_1 \\ \underline{u}_2 & \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} & \underline{b}_2 \\ -z & \underline{c}^T_1 & \underline{c}^T_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahol $\underline{x}^T_1$ a báziscserében részvett $\underline{x}^T_2$ pedig a a báziscserében rész nem vett változók vektora. Hasonlóan $\underline{u}^T_1$ a báziscserében részvett $\underline{u}^T_2$ pedig a báziscserében részt nem vett sorok Szimplex tábla jelölései.

Ekkor - a levezetést mellőzve – az optimális tábla általános mátrixokkal felírt alakja:

$$\begin{bmatrix} 1. & \underline{u}^T_1 & \underline{x}^T_2 & \underline{b} \\ \underline{x}_1 & \underline{A}^{-1}_{11} & \underline{A}^{-1}_{11} \cdot \underline{A}_{12} & \underline{A}^{-1}_{11} \cdot \underline{b}_1 \\ \underline{u}_2 & -\underline{A}^{-1}_{11} \cdot \underline{A}_{21} & \underline{A}_{21} - \underline{A}^{-1}_{11} \cdot \underline{A}_{22} & \underline{b}_2 - \underline{A}_{21} \cdot \underline{A}^{-1}_{11} \cdot \underline{b}_1 \\ -z & -\underline{c}^T_1 \cdot \underline{A}^{-1}_{11} & - \underline{c}^T_2 - \underline{c}^T_1 \cdot \underline{A}^{-1}_{11} \cdot \underline{A}_{12} & \underline{c}^T_1 \cdot \underline{A}^{-1}_{11} \cdot \underline{b}_1 \end{bmatrix}$$

Könnyen belátható, hogy az optimális táblában az $\underline{A}_{11}$ mátrix helyére az inverze kerül, mert a fátló teljes báziscseréjével ("végiggenerálásával") éppen a mátrix inverzét kapjuk.
A fenti tábla megvizsgálható azon szempontból, hogy az optimális tábla értékei ($\underline{b}_{opt}$, $\underline{c}_{opt}$, z_{opt}) a tábla mely ilyetén felosztott részeitl függnek. Például: ha - az eredeti táblában - $\underline{b}_1$ valamely eleme változik az változást okoz a célfüggvény értékében, ha azonban $\underline{b}_2$ -é az nem okoz változást, mivel $\underline{b}_2$ nem szerepel z optimális kifejezésében! Hasonlóan ha $\underline{c}_1$ valamely eleme változik az változást okoz a célfüggvény értékében, $\underline{c}_2$ elemének változása azonban nem. A technológia - vagyis az együttható mátrix különböz részeinek - változása hasonlóan, attól függen hogy szerepel-e a vizsgálni kívánt kifejezésben, változást okozó vagy változást nem okozó hatású lehet.

Egészítsük ki most az optimális táblát az alábbi ($\underline{s}$) segédvektorokkal,

$$\begin{bmatrix} \underline{s}_{fb} & [\ \underline{b}_1 & , & \underline{0}\ ] \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1. & \underline{u}^{T}_{1} & \underline{x}^{T}_{2} & \underline{b} \\ \underline{x}_1 & \underline{A}^{-1}_{11} & \underline{A}^{-1}_{11}\cdot\underline{A}_{12} & \underline{A}^{-1}_{11}\cdot\underline{b}_1 \\ \underline{u}_2 & -\underline{A}^{-1}_{11}\cdot\underline{A}_{21} & \underline{A}_{21}-\underline{A}^{-1}_{11}\cdot\underline{A}_{22} & \underline{b}_2-\underline{A}_{21}\cdot\underline{A}^{-1}_{11}\cdot\underline{b}_1 \\ -z & -\underline{c}^{T}_{1}\cdot\underline{A}^{-1}_{11}\ - & \underline{c}^{T}_{2}-\underline{c}^{T}_{1}\cdot\underline{A}^{-1}_{11}\cdot\underline{A}_{12} & \underline{c}^{T}_{1}\cdot\underline{A}^{-1}_{11}\cdot\underline{b}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{t}_{jb} \\ \underline{0} \\ \underline{b}_2 \\ \ \end{bmatrix}$$

melynek képzési szabályai az alábbiak:

Ahol a táblázat sorában u változó áll, ott a segédvektorban b-t jelenítünk meg, ahol x ott nullát. Ennek logikája, hogy az u változó a sorokban jelenik meg, melyek végén állnak a b-k a kapacitás korlát értékek. x - hez viszont "c tartozik", mivel az oszlopok alján a célfüggvény együtthatók szerepelnek.
Fogalmazzunk meg most három állítást, (és konstrukciós bizonyítással bizonyítsuk is ket) melyek létjogosultsága majd csak a módszer alkalmazásakor derül ki.
(Jelenleg öncélúaknak tnhetnek.)

1.Állítás

$\underline{b}_{\text{opt}} = \underline{A}_{\text{opt}} * \underline{s}_{\text{fb}} + \underline{s}_{\text{jb}}$ (1)

Bizonyítás:

$\underline{b}_{\text{opt}}$ az optimális tábla b oszlopából:

$$\underline{b}_{opt.} = \begin{bmatrix} \underline{A}^{-1}_{11}\cdot\underline{b}_1 \\ \underline{b}_2-\underline{A}_{21}\cdot\underline{A}^{-1}_{11}\cdot\underline{b}_1 \end{bmatrix}$$

illetve az (1) képlettel történ számításból: (a segédvektorok definícióit illetve mátrix-vektor szorzást és vektor összeadást használva)

$$\underline{b}_{opt.} = \begin{bmatrix} \underline{A}^{-1}_{11} & \underline{A}^{-1}_{11}\cdot\underline{A}_{12} \\ -\underline{A}^{-1}_{11}\cdot\underline{A}_{21} & \underline{A}_{21}-\underline{A}^{-1}_{11}\cdot\underline{A}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{b}_1 \\ \underline{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}^{-1}_{11}\cdot\underline{b}_1+\underline{A}^{-1}_{11}\cdot\underline{A}_{12}\cdot\underline{0}+\underline{0} \\ -\underline{A}^{-1}_{11}\cdot\underline{A}_{21}\cdot\underline{b}_1+\underline{0}+\underline{b}_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \underline{A}^{-1}_{11}\cdot\underline{b}_1 \\ -\underline{A}^{-1}_{11}\cdot\underline{A}_{21}\cdot\underline{b}_1+\underline{b}_2 \end{bmatrix}$$

Láthatóan azonosságot kapunk. Tehát az (1) állítás – mivel azonosságra vezethető vissza –

bizonyított!

2. Állítás

$\underline{c}_{opt}^T = \underline{s}_{ac}^T - \underline{s}_{bc}^T * \underline{A}_{opt}$ (2)

Bizonyítás:

$$\begin{bmatrix} 1. & \underline{u}_1^T & \underline{x}_2^T & \underline{b} \\ \underline{x}_1 & \underline{A}^{-1}_{11} & \underline{A}^{-1}_{11}\cdot\underline{A}_{12} & \underline{A}^{-1}_{11}\cdot\underline{b}_1 \\ \underline{u}_2 & -\underline{A}^{-1}_{11}\cdot\underline{A}_{21} & \underline{A}_{21}-\underline{A}^{-1}_{11}\cdot\underline{A}_{22} & \underline{b}_2-\underline{A}_{21}\cdot\underline{A}^{-1}_{11}\cdot\underline{b}_1 \\ -z & -\underline{c}_1^T\cdot\underline{A}^{-1}_{11} & \underline{c}_2^T-\underline{c}_1^T\cdot\underline{A}^{-1}_{11}\cdot\underline{A}_{12} & \underline{c}_1^T\cdot\underline{A}^{-1}_{11}\cdot\underline{b}_1 \end{bmatrix}$$

Szintén a segédvektorok definícióit és az optimális tábla elemeit helyettesítve:

$$\underline{c}^T_{opt} = \begin{bmatrix} \underline{0}^T & \underline{c}_2^T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \underline{c}_1^T & \underline{0}^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{A}^{-1}_{11} & \underline{A}^{-1}_{11}\cdot\underline{A}_{12} \\ -\underline{A}^{-1}_{11}\cdot\underline{A}_{21} & \underline{A}_{21}-\underline{A}^{-1}_{11}\cdot\underline{A}_{22} \end{bmatrix} =$$

$$\left[\left(\underline{0}^T - \left(\underline{c}_1^T\cdot\underline{A}^{-1}_{11} + -\underline{0}^T\cdot\underline{A}^{-1}_{11}\cdot\underline{A}_{21}\right), \left(\underline{c}_2^T - \left(\underline{c}_1^T\cdot\underline{A}^{-1}_{11}\cdot\underline{A}_{12} + \underline{0}^T\cdot\left(\underline{A}_{21}-\underline{A}^{-1}_{11}\cdot\underline{A}_{22}\right)\right)\right)\right)\right] = \begin{bmatrix} \left(-\underline{c}_1^T\cdot\underline{A}^{-1}_{11}\right) & \left(\underline{c}_2^T-\underline{c}_1^T\cdot\underline{A}^{-1}_{11}\cdot\underline{A}_{12}\right) \end{bmatrix}$$

Ami éppen az optimális tábla -z sorában álló részével egyezik meg - vagyis $\underline{c}_{opt}^T$-al.

3.Állítás

$-z_{opt} = \underline{c}_{opt}^T * \underline{s}_{fb}$ (3)

Bizonyítás: (szintén behelyettesítéssel)

$$-z_{opt} = \left[\left(-\underline{c}_1^T\cdot\underline{A}_{11}^{-1}\right) \left(\underline{c}_2 - \underline{c}_1^T\cdot\underline{A}_{11}^{-1}\cdot\underline{A}_{12}^{-1}\right)\right]\cdot\begin{bmatrix} \underline{b}_1 \\ \underline{0} \end{bmatrix} = \underline{c}_1^T\cdot\underline{A}_{11}^{-1}\cdot\underline{b}_1 + \left(\underline{c}_2 - \underline{c}_1^T \cdot\underline{A}_{11}^{-1}\cdot\underline{A}_{12}^{-1}\right)\cdot\underline{0} = -\underline{c}_1^T\cdot\underline{A}_{11}^{-1}\cdot\underline{b}_1$$

Láthatóan az optimális táblabeli sarokelemet kapjuk, vagyis állításunk bizonyított.

Mindhárom állítás egyszer behelyettesítéssel igazolható volt.

Mj:Az (1) (2) (3) állítások igazak maradnak akkor is, ha nem rendezzük a sorokat, oszlopokat a fátlón történ bázis csere ("generálás") eléréséhez.
Ennek bemutatására - nem bizonyítására, mert egyetlen példa egy általános állítás bizonyításához nem elegend - tekintsünk egy példát a következ fejezetben.

Példa az átrendezhetség illusztrálására

A példa feladat:

$$x_1 + x_2 + 2\cdot x_3 \le 8,$$
$$6\cdot x_1 + 3\cdot x_2 \le 12,$$
$$-2\cdot x_1 + 4\cdot x_3 \le 28,$$
$$x_1 - 5\cdot x_2 \le 15$$

$$3\cdot x_1 + 7\cdot x_2 + 9\cdot x_3$$

ahol x_1, x_2, nemnegatív

Maple ablakban (a számításokhoz):

$$x_1 + x_2 + 2\cdot x_3 \le 8,$$
$$6\cdot x_1 + 3\cdot x_2 \le 12,$$
$$-2\cdot x_1 + 4\cdot x_3 \le 28,$$
$$x_1 - 5\cdot x_2 \le 15$$

$$3\cdot x_1 + 7\cdot x_2 + 9\cdot x_3$$

Induló táblája:

$$\begin{bmatrix} 0 & x_1 & x_2 & x_3 & b \\ u_1 & 1 & 1 & 2 & 8 \\ u_2 & 6 & 3 & 0 & 12 \\ u_3 & -2 & 0 & 4 & 28 \\ u_4 & 1 & -5 & 0 & 15 \\ -z & 3 & 7 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

Optimális megoldása:

$erzekenysegInput1a(\ ),\ bazisChangeV\left(u_1, x_3\right),\ bazisChangeV\left(u_2, x_2\right)$;
$bazisMegoldas(\ ),\ celfvErtek(\ )$;

$$\begin{bmatrix} 0 & x_1 & x_2 & x_3 & b \\ u_1 & 1 & 1 & 2 & 8 \\ u_2 & 6 & 3 & 0 & 12 \\ u_3 & -2 & 0 & 4 & 28 \\ u_4 & 1 & -5 & 0 & 15 \\ -z & 3 & 7 & 9 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 & u_1 & b \\ x_3 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 4 \\ u_2 & 6 & 3 & 0 & 12 \\ u_3 & -4 & -2 & -2 & 12 \\ u_4 & 1 & -5 & 0 & 15 \\ -z & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{9}{2} & -36 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & x_1 & u_2 & u_1 & b \\ x_3 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 2 \\ x_2 & 2 & \frac{1}{3} & 0 & 4 \\ u_3 & 0 & \frac{2}{3} & -2 & 20 \\ u_4 & 11 & \frac{5}{3} & 0 & 35 \\ -z & -\frac{13}{2} & -\frac{5}{6} & -\frac{9}{2} & -46 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = 0,\ x_2 = 4,\ x_3 = 2,\ \text{"cél függvény : "},\ z = 46 \qquad \textbf{(3.1)}$$

Elemezve az optimális táblát látható, hogy u_1 , u_2 valamint x_2, x_3 vesznek részt a báziscserében. E táblát úgy is átrendezhetjük, hogy a báziscsere elemek a fátlóra kerüljenek!

$$\begin{bmatrix} 2 & x_1 & \boldsymbol{u_2} & \boldsymbol{u_1} & b \\ \boldsymbol{x_3} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 2 \\ \boldsymbol{x_2} & 2 & \frac{1}{3} & 0 & 4 \\ u_3 & 0 & \frac{2}{3} & -2 & 20 \\ u_4 & 11 & \frac{5}{3} & 0 & 35 \\ -z & -\frac{13}{2} & -\frac{5}{6} & -\frac{9}{2} & -46 \end{bmatrix}$$

Írjuk fel a feladatot így átrendezve, ismételten Maple ablakban is. Jelöljük az új változókat xu és uu -knak. Tulajdonképpen csak x_3-nak kell az els oszlopba kerülnie, x_2 marad a helyén. Vagyis $xu_1 = x_3$ $xu_2 = x_2$ $xu_3 = x_1$. Az "u"-k pedig helyükön maradhatnak vagyis: $uu_1 = u_1$ $uu_2 = u_2$ $uu_3 = u_3$.

$2\cdot xu_1 + xu_2 + xu_3 \le 8,$
$3\cdot xu_2 + 6\cdot xu_3 \le 12,$
$4\cdot xu_1 - 2\cdot xu_3 + \le 28,$
$-5\cdot xu_2 + xu_3 \le 15$

$9\cdot xu_1 + 7\cdot xu_2 + 3\cdot xu_3$

ahol $x_1, x_2,$ nemnegatív

Maple ablakban (a számításokhoz):

$2\cdot xu_1 + xu_2 + xu_3 \le 8,$
$3\cdot xu_2 + 6\cdot xu_3 \le 12,$
$4\cdot xu_1 - 2\cdot xu_3 \le 28,$
$-5\cdot xu_2 + xu_3 \le 15$

$9\cdot xu_1 + 7\cdot xu_2 + 3\cdot xu_3$

$erzekenysegInput1atrend(\,),\ bazisChangeV\left(u_1, xu_1\right),\ bazisChangeV\left(u_2, xu_2\right)\ ;$
$bazisMegoldas(\,),\ celfvErtek(\,);$

$$\begin{bmatrix} 0 & xu_1 & xu_2 & xu_3 & b \\ u_1 & 2 & 1 & 1 & 8 \\ u_2 & 0 & 3 & 6 & 12 \\ u_3 & 4 & 0 & -2 & 28 \\ u_4 & 0 & -5 & 1 & 15 \\ -z & 9 & 7 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & u_1 & xu_2 & xu_3 & b \\ xu_1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 4 \\ u_2 & 0 & 3 & 6 & 12 \\ u_3 & -2 & -2 & -4 & 12 \\ u_4 & 0 & -5 & 1 & 15 \\ -z & -\frac{9}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & -36 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & u_1 & u_2 & xu_3 & b \\ xu_1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & 2 \\ xu_2 & 0 & \frac{1}{3} & 2 & 4 \\ u_3 & -2 & \frac{2}{3} & 0 & 20 \\ u_4 & 0 & \frac{5}{3} & 11 & 35 \\ -z & -\frac{9}{2} & -\frac{5}{6} & -\frac{13}{2} & -46 \end{bmatrix}$$

$$xu_1 = 2, xu_2 = 4, xu_3 = 0, \text{"cél függvény : "}, z = 46 \qquad \textbf{(3.2)}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & \mathbf{u_1} & \boldsymbol{u_2} & xu_3 & b \\ \boldsymbol{xu_1} & \mathbf{\frac{1}{2}} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & 2 \\ \boldsymbol{xu_2} & 0 & \frac{1}{3} & 2 & 4 \\ u_3 & -2 & \frac{2}{3} & 0 & 20 \\ u_4 & 0 & \frac{5}{3} & 11 & 35 \\ -z & -\frac{9}{2} & -\frac{5}{6} & -\frac{13}{2} & -46 \end{bmatrix}$$

Láthatóan ténylegesen a fátlón helyezkednek el a báziscsere elemek.
Ez nem bizonyítása, csak illusztrálása annak hogy ezen átrendezés minden esetben lehetséges.

Állítjuk, hogy korábbi három állításunk akkor is érvényben marad, ha a fenti átrendezést nem tesszük meg, mivel lineáris algebrai tanulmányainkból tudunk, hogy sor és oszlop csere nem változtatja eredményeinket - csak más sorrendben kapjuk meg ket.
Ekkor is a segédvektorok konstrukciójának szabálya (pongyolán fogalmazva) az marad, hogy "u-hoz b x-hez pedig nulla tartozik."
Az így konstruált $\underline{t}$ segédvektorok csak koordinátáik sorrendjében különböznek az eredeti $\underline{s}$ vektoroktól.

Ekkor állításaink az alábbi *-os alakokat öltik:

1. Állítás:

$$\underline{b}_{\,opt} = \underline{A}_{\,opt} * \underline{t}_{\,fb} + \underline{t}_{\,jb} \qquad (1\,*)$$

2. Állítás:

$\underline{c}_{opt}{}^{T} = \underline{t}_{ac}{}^{T} - \underline{t}_{bc}{}^{T} * {}^{T}\underline{A}_{opt}$ (2 *)

3. Állítás:

$- z_{opt} = \underline{c}_{opt}{}^{T} * \underline{t}_{fb}$ (3 *)

Ahol $\underline{t}_{fb}$, $\underline{t}_{jb}$ a

Mj_1: Ekkor az általános vektoros alakok - sem az induló, sem az optimális táblára - nem írhatók fel.
Mj_2: Fenti eljárás nem bizonyítás, csak a megértést elfogadást segít indoklás.

Konstruáljuk is meg most fenti - nem átrendezett sorrend - $\underline{t}$ segédvektorokat:
Mivel a Szimplex táblázat fels sorában [x_1 , u_2, u_1] állnak, ezért $\underline{t}_{fb}{}^{T}$ = [0 , b_2, b_1] lesznek. Az eredeti táblából származó értékekkel pedig: [0 , 12 , 8] .

Hasonlóan $\underline{t}_{jb}$-re: mivel az oszlopban $\begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$ áll, így $\underline{t}_{jb}{}^{T} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$

Ezzel az els állításunk aktuális alakja:

$$\underline{b}_{opt} = A_{opt} * \underline{t}_{fb} + \underline{t}_{jb} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & -2 \\ 11 & \frac{5}{3} & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \\ b_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} b_2 + \frac{1}{2} b_1 \\ \frac{1}{3} b_2 \\ \frac{2}{3} b_2 - 2 \cdot b_1 \\ \frac{5}{3} b_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} =$$

vagyis:

$$\underline{b}_{opt} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} b_2 + \frac{1}{2} b_1 \\ \frac{1}{3} b_2 \\ \frac{1}{3} b_2 - 2 \cdot b_1 + b_3 \\ \frac{5}{3} b_2 + b_4 \end{bmatrix}$$

Ezt fogjuk majd használni a késbbiekben.

Ellenrzés módszere:

Ezen módszer régebben, - amikor még nem voltak számítógépes programok - volt igazán hasznos, mivel sohasem lehettek biztosak magukban a matematikusok, a számítást végzk, hogy nem követtek el számítási hibát. Ha ezt az ellenrzést kiszámolták és egyezett, akkor nyugodhattak csak meg. Jelenleg - a számítógépi módszerek korában - ennek nincs már ilyen jelentsége, az ellenrzés módszerét inkább didaktikai, (tanulási lépés) céllal mutatjuk be. Könnyebben érthet lesz a következ erre épül módszer.
Ellenrzés:

Az ellenőrzés egyszerűen az (1*) (2*) (3*) képletekbe – az eredeti értékek - behelyettesítésével végezhet el:

$$\underline{b}_{opt} = \underline{A}_{opt} * \underline{t}_{fb} + \underline{t}_{jb} \qquad (1*)$$

Ehhez szükségünk van az optimális táblabeli $\underline{A}$ mátrixra:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & -2 \\ 11 & \frac{5}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

A segédvektorok - indulótáblából vett - értékei:

$$\underline{t}_{jb}^{T} = [\,0\,,\ b_2\ ,\ b_1\,] = \begin{bmatrix} 0 & 12 & 8 \end{bmatrix} \text{ és } \underline{t}_{jb} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 28 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Ezeket az (1*) állításba helyettesítve:

$$\underline{b}_{opt} = \underline{A}_{opt} * \underline{t}_{fb} + \underline{t}_{jb} =$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & -2 \\ 11 & \frac{5}{3} & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 28 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6}\cdot 12 + \frac{1}{2}\cdot 8 \\ \frac{1}{3}\cdot 12 \\ \frac{2}{3}\cdot 12 - 2\cdot 8 + 28 \\ \frac{5}{3}\cdot 12 + 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 20 \\ 35 \end{bmatrix}$$

Mely ténylegesen megegyezik az optimális tábla b oszlopával:

A célfüggvény együtthatókra is kiszámítva a (2*) állítást:

$$\underline{c}_{opt}^{T} = \underline{t}_{ac}^{T} - \underline{t}_{bc}^{T} * {}^{T}\underline{A}_{opt} = [\, 3 , 0 , 0 \,] - [\, 9 , 7 , 0 , 0 \,] * \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & -2 \\ 11 & \frac{5}{3} & 0 \end{bmatrix} = [\, 3 - 1/2 * 9 + 2 * 7 \,)$$

$, 0 - (-1/6 * 9 + 1/3 * 7) , 0 - (1/2 * 9)] =$

$= [\, 6/2 + 9/2 - 28/2 , 9/6 - 14/6 , - 4.5 \,] = [\, - 13/2 , - 5/6 , - 4.5 \,]$

A Szimplex táblázat utolsó sorával megegyez értékeket kaptunk, vagyis állításunk a konkrét számítási esetben teljesült.

A célfüggvényre vonatkozó (3*) állítás pedig:

$$- z_{opt} = [\, - 13/2 , - 5/6 , - 4.5 \,] * \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ 8 \end{bmatrix} = -13/2 * 0 - 5/6 *12 - 9/2 * 8 = -5*2 - 9*4 = - 10 - 36 = - 46$$

mely megegyezik az optimális táblabeli célfüggvény értékkel.

Mindhárom állításunkat kiszámítva, állíthatjuk, hogy mindegyik teljesült. (Mindezeket csak módszertani céllal végeztük el, mivel hallgatóink többsége számokkal könnyebben ért meg egy eljárást, mint azonnal általánosan ("betkkel").

A variáns számítási módszer a kapacitás vektorokra és grafikus

reprezentálása

Napjainkban - amikor újabb feladat kiszámolása (a számítógépes megoldás miatt) nem jelent hosszadalmas munkát - ezen módszernek szintén fként módszertani jelentsége van, mivel algoritmusa (számítási mechanizmusa) megegyezik az érzékenységvizsgálatéval, viszont nem tartalmaz változókat.
Amennyiben egyetlen kapacitás komponens (b_2) változik meg a megoldást az (1*) képletbe történ helyettesítéssel is megkaphatjuk. Ez - az esetenként több, báziscsere elvégzése helyett - csak egyetlen mátrix vektor szorzást jelent. Ez jóval kevesebb számítással jár. .

Legyen $\underline{b}_{új} = \begin{bmatrix} 8 \\ 21 \\ 28 \\ 15 \end{bmatrix}$: Mivel $\underline{b}_{opt\ új} = \underline{A}_{opt} * \underline{t}_{fb\ új} + \underline{t}_{jb\ új}$

ezért ki kell számítanunk az új segédvektorokat.
$\underline{b}$-nek csak a második koordinátája változott meg ez pedig csak $\underline{t}_{fb}$ - ben szerepel, így $\underline{t}_{jb}$ változatlan marad.

$\underline{t}_{fb\ új} = \begin{bmatrix} 0 \\ 21 \\ 8 \end{bmatrix}$: $\underline{b}_{opt\ új}$ számítása pedig:

$$\underline{b}_{opt\ új} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & -2 \\ 11 & \frac{5}{3} & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ 21 \\ 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 28 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6}\cdot 21 + \frac{1}{2}\cdot 8 \\ \frac{1}{3}\cdot 21 \\ \frac{2}{3}\cdot 21 - 2\cdot 8 \\ \frac{5}{3}\cdot 21 + 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3,5+4 \\ 7 \\ 14-16+28 \\ 35+15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 7 \\ 26 \\ 50 \end{bmatrix}$$

Az optimális tábla többi része - a célfüggvény sor és (a jobb sarokelemnél szerepl) célfüggvény érték - az elméleti (szimbólumokkal kiszámított) optimális táblából láthatóan - nem változik, mivel ezen sorban nem szerepel a változtatott kapacitás. A megoldás pedig az optimális tábla "szélének" ismeretében leolvasható:

$$\underline{x}_{opt\ új} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Tekintsünk egy másik változtatást (variánst). Módosuljon a b_2 kapacitás még magasabb értékre:

Legyen $\underline{b}_{új}=\begin{bmatrix}8\\30\\28\\15\end{bmatrix}$: Ekkor

$$\underline{b}_{\text{opt új}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & -2 \\ 11 & \frac{5}{3} & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix}0\\30\\8\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\28\\15\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6}\cdot 30 + \frac{1}{2}\cdot 8 \\ \frac{1}{3}\cdot 30 \\ \frac{2}{3}\cdot 30 - 2\cdot 8 \\ \frac{5}{3}\cdot 30 + 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5+4 \\ 10 \\ 20-16 \\ 50+15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{-1} \\ 10 \\ 4 \\ 65 \end{bmatrix}$$

Ami pedig Szimplex módszerünkben nem megengedhet tábla! (Negatív elemet (-1) tartalmaz a b oszlopban)
A megoldás leolvasásakor x_3 értéke negatív lenne - amit az feladat megadás nem enged meg.

Vizsgáljuk a feladat grafikus megjelenítését, hogyan lehetséges ez!
Ehhez meg kell hívnunk ismételten az eredeti feladat beolvasását és a báziscseréket is.

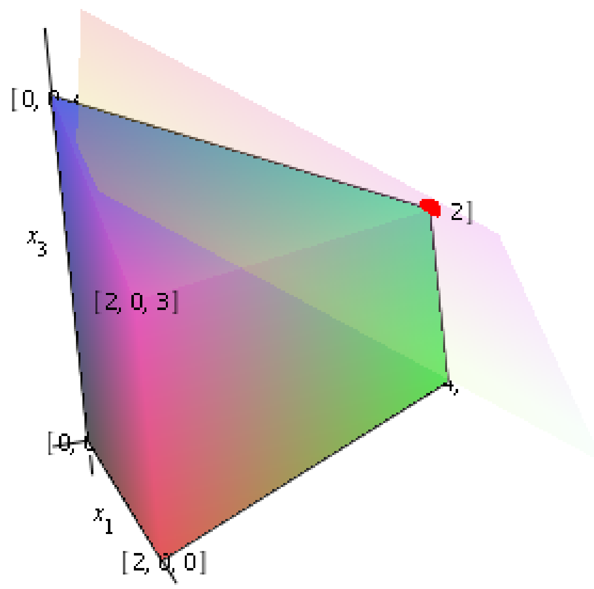
$erzekenysegInput1a(\,),\ bazisChangeV(u_1, x_3),\ bazisChangeV(u_2, x_2)\ ;$
$bazisMegoldas(\,),\ celfvErtek(\,);$

$$\begin{bmatrix} 0 & x_1 & x_2 & x_3 & b \\ u_1 & 1 & 1 & 2 & 8 \\ u_2 & 6 & 3 & 0 & 12 \\ u_3 & -2 & 0 & 4 & 28 \\ u_4 & 1 & -5 & 0 & 15 \\ -z & 3 & 7 & 9 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 & u_1 & b \\ x_3 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 4 \\ u_2 & 6 & 3 & 0 & 12 \\ u_3 & -4 & -2 & -2 & 12 \\ u_4 & 1 & -5 & 0 & 15 \\ -z & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{9}{2} & -36 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & x_1 & u_2 & u_1 & b \\ x_3 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 2 \\ x_2 & 2 & \frac{1}{3} & 0 & 4 \\ u_3 & 0 & \frac{2}{3} & -2 & 20 \\ u_4 & 11 & \frac{5}{3} & 0 & 35 \\ -z & -\frac{13}{2} & -\frac{5}{6} & -\frac{9}{2} & -46 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = 0,\ x_2 = 4,\ x_3 = 2,\ \text{"cél függvény : "},\ z = 46 \qquad \textbf{(5.1)}$$

Ezen feladat és megoldás 3 dimenziós reprezentálása:

$abraeredeti := abra3dModNorm(\,) : abraeredeti;$



A módosított kapacitás érték feladat Maple ablakban (a számításokhoz és az ábra elkészítéséhez):

$x_1 + x_2 + 2 \cdot x_3 \leq 8,$
$6 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \leq 21,$
$-2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_3 \leq 28,$
$x_1 - 5 \cdot x_2 \leq 15$

$3 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 + 9 \cdot x_3$

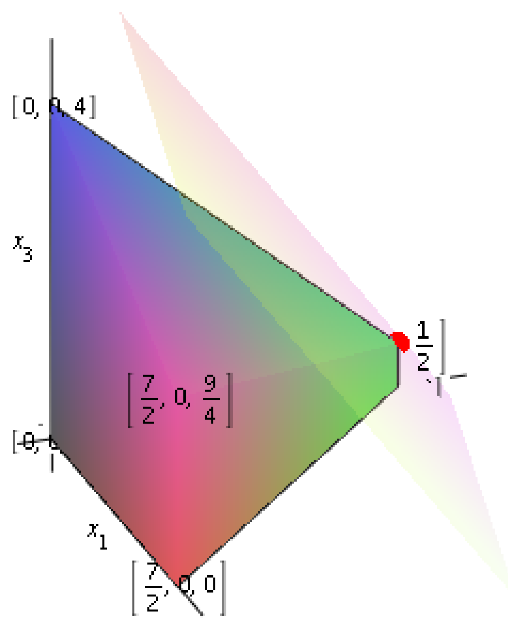
Optimális megoldása:

erzekenysegInput1b( ), *bazisChangeV*$\left(u_1, x_3\right)$, *bazisChangeV*$\left(u_2, x_2\right)$;
bazisMegoldas( ), *celfvErtek*( );

$$\begin{bmatrix} 0 & x_1 & x_2 & x_3 & b \\ u_1 & 1 & 1 & 2 & 8 \\ u_2 & 6 & 3 & 0 & 21 \\ u_3 & -2 & 0 & 4 & 28 \\ u_4 & 1 & -5 & 0 & 15 \\ -z & 3 & 7 & 9 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 & u_1 & b \\ x_3 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 4 \\ u_2 & 6 & 3 & 0 & 21 \\ u_3 & -4 & -2 & -2 & 12 \\ u_4 & 1 & -5 & 0 & 15 \\ -z & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{9}{2} & -36 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & x_1 & u_2 & u_1 & b \\ x_3 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ x_2 & 2 & \frac{1}{3} & 0 & 7 \\ u_3 & 0 & \frac{2}{3} & -2 & 26 \\ u_4 & 11 & \frac{5}{3} & 0 & 50 \\ -z & -\frac{13}{2} & -\frac{5}{6} & -\frac{9}{2} & -\frac{107}{2} \end{bmatrix}$$

$$x_1 = 0, x_2 = 7, x_3 = \frac{1}{2}, \text{"cél függvény : "}, z = \frac{107}{2} \qquad \textbf{(5.2)}$$

abramodosult1 ≔ *abra3dModNorm*( ) : *abramodosult*;



Láthatóan az optimális pont közelebb került az x_2 tengelyhez, mert a függleges - mivel az egyenlet jobb oldala egyre növekszik - egyre távolabb kerül az origótól (vagy úgyis mondhatjuk hogy az x_3 tengelytl).
Nézzük mi történik ha a sík konstans értékét (vagyis a b_2 -es kapacitást) még tovább növeljük:
Az ábrához ismételten Maple ablakban kell feladatunkat megjeleníteni.

$x_1 + x_2 + 2 \cdot x_3 \leq 8,$
$6 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \leq 30,$
$-2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_3 \leq 28,$
$x_1 - 5 \cdot x_2 \leq 15$

$3 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 + 9 \cdot x_3$

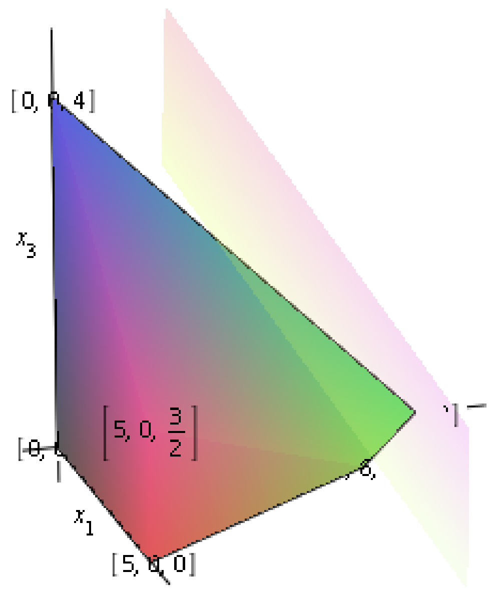
Optimális megoldása:

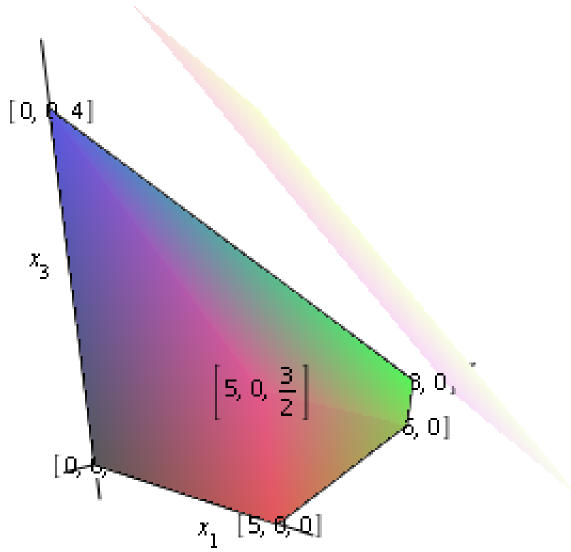
$erzekenysegInput1c(\,),\ bazisChangeV(u_1, x_3),\ bazisChangeV(u_2, x_2)\ ;$
$bazisMegoldas(\,),\ celfvErtek(\,);$

$$\left[\begin{array}{ccccc} 0 & x_1 & x_2 & x_3 & b \\ u_1 & 1 & 1 & 2 & 8 \\ u_2 & 6 & 3 & 0 & 30 \\ u_3 & -2 & 0 & 4 & 28 \\ u_4 & 1 & -5 & 0 & 15 \\ -z & 3 & 7 & 9 & 0 \end{array}\right], \left[\begin{array}{ccccc} 1 & x_1 & x_2 & u_1 & b \\ x_3 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 4 \\ u_2 & 6 & 3 & 0 & 30 \\ u_3 & -4 & -2 & -2 & 12 \\ u_4 & 1 & -5 & 0 & 15 \\ -z & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{9}{2} & -36 \end{array}\right], \left[\begin{array}{ccccc} 2 & x_1 & u_2 & u_1 & b \\ x_3 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -1 \\ x_2 & 2 & \frac{1}{3} & 0 & 10 \\ u_3 & 0 & \frac{2}{3} & -2 & 32 \\ u_4 & 11 & \frac{5}{3} & 0 & 65 \\ -z & -\frac{13}{2} & -\frac{5}{6} & -\frac{9}{2} & -61 \end{array}\right]$$

$$x_1 = 0,\ x_2 = 10,\ x_3 = -1,\ \text{"cél függvény : "},\ z = 61 \qquad \textbf{(5.3)}$$

$abramodosult2 := abra3dModNorm(\,) : abramodosult2;$


[0, 0, 4]
x_3
$\left[5, 0, \frac{3}{2}\right]$
x_1
[5, 0, 0]

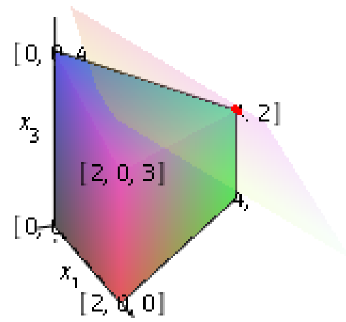


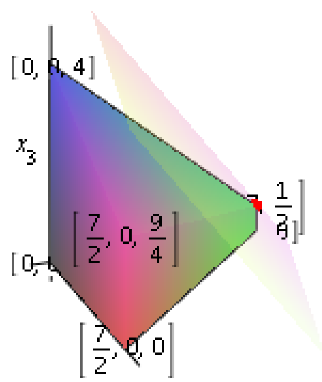
Láthatóan ekkor megsértettük a Szimplex módszer szabályát, nem a minimális hányadosnál választottuk báziscsere elemet, kiléptünk a megengedhet megoldások tartományából,

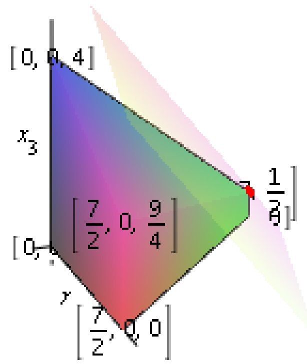
az $\underline{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ \mathbf{-1} \end{bmatrix}$ - es pontba toltuk a célfüggvényt. Vagyis az hogy megtartsuk megoldásunk struktúráját, (vagyis, hogy ugyan azon termékeket gyártsuk továbbra is), csak akkor lehetséges, ha a b2 kapacitással nem lépünk túl egy meghatározott határon. Éppen ezen határok meghatározása a célja az érzékenységvizsgálatnak!

A három tartomány együttes megjelenítésén még jobban látszik, hogyan változik (nemcsak) a célfüggvény hanem a tartomány is. (Mj: Mivel a tartomány is módosul nem lehetséges animáltan megjeleníteni a változást.)

display(*abraeredeti*);
display(*abramodosult1*);
display(*abramodosult2*);


[0, 0, 4
x_3
[2, 0, 3]
[0,
x_1
[2, 0, 0]


[0, 0, 4]
x_3
$\left[\frac{7}{2}, 0, \frac{9}{4}\right]$
[0,
$\left[\frac{7}{2}, 0, 0\right]$



Mieltt rátérnénk erre, a jobb átláthatóság céljából nézzük ugyanezt egy példa kétdimenziós feladat esetében:

$x_1 + x_2 \leq 4,$
$-x_1 + x_2 \leq 2,$
$2 \cdot x_1 - x_2 \leq 4,$
$x_2 \leq 3$

$2 \cdot x_1 + x_2$

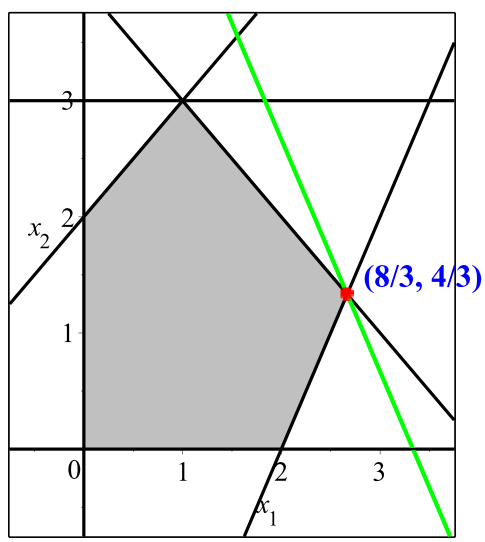
Optimális megoldása:

erzekenysegInput2a( ), *bazisChangeV*(u_3, x_1),
bazisChangeV(u_1, x_2) ;
bazisMegoldas( ), *celfvErtek*( );

$$\begin{bmatrix} 0 & x_1 & x_2 & b \\ u_1 & 1 & 1 & 4 \\ u_2 & -1 & 1 & 2 \\ u_3 & 2 & -1 & 4 \\ u_4 & 0 & 1 & 3 \\ -z & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & u_3 & x_2 & b \\ u_1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 2 \\ u_2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 4 \\ x_1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ u_4 & 0 & 1 & 3 \\ -z & -1 & 2 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & u_3 & u_1 & b \\ x_2 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ u_2 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{10}{3} \\ x_1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{8}{3} \\ u_4 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ -z & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{20}{3} \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{8}{3}, x_2 = \frac{4}{3}, \text{"cél függvény : "}, z = \frac{20}{3} \tag{5.4}$$

abra2deredeti := *abra2d*( ) : *abra2deredeti*;



Ha bvítjük a b_1 kapacitást (4-es értékrl 6-osra):

$x_1 + x_2 \le 6,$
$-x_1 + x_2 \le 2,$
$2 \cdot x_1 - x_2 \le 4,$
$x_2 \le 3$

$2 \cdot x_1 + x_2$

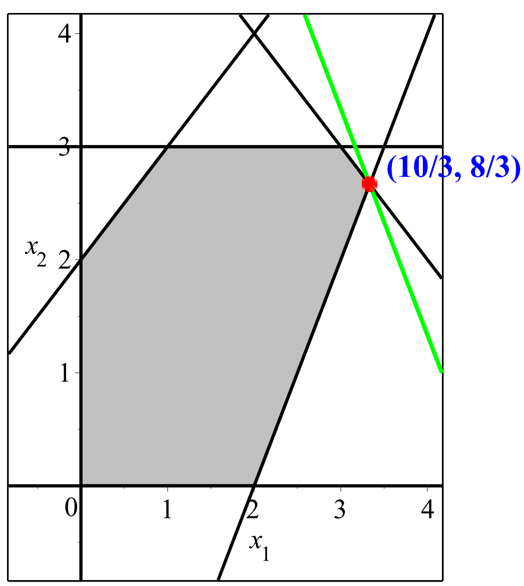
Optimális megoldása:

erzekenysegInput2b( ), *bazisChangeV*(u_3, x_1),
bazisChangeV(u_1, x_2) ;
bazisMegoldas( ), *celfvErtek*( );

$$\begin{bmatrix} 0 & x_1 & x_2 & b \\ u_1 & 1 & 1 & 6 \\ u_2 & -1 & 1 & 2 \\ u_3 & 2 & -1 & 4 \\ u_4 & 0 & 1 & 3 \\ -z & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & u_3 & x_2 & b \\ u_1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 4 \\ u_2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 4 \\ x_1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ u_4 & 0 & 1 & 3 \\ -z & -1 & 2 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & u_3 & u_1 & b \\ x_2 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{8}{3} \\ u_2 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{8}{3} \\ x_1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{10}{3} \\ u_4 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -z & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{28}{3} \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{10}{3}, x_2 = \frac{8}{3}, \text{"cél függvény : "}, z = \frac{28}{3} \qquad \textbf{(5.5)}$$

abra2dmodosult1 := *abra2d*( ) : *abra2dmodosult1*;



Láthatóan a megengedhet megoldások tartománya bvült, (az (1)-es feltétel feljebb tolódott) ezzel együtt az optimalitási pont is felfelé tolódott a (4)-es feltétel ($x_2 \le 3$-as) korlát felé a (3)-as ($2 \cdot x_1 - x_2 \le 4$ -es) korlátozó feltétel mentén.

Még tovább, 7-esre növelve a b_1 kapacitást:

$$x_1 + x_2 \le 7,$$
$$-x_1 + x_2 \le 2,$$
$$2 \cdot x_1 - x_2 \le 4,$$
$$x_2 \le 3$$

$$2 \cdot x_1 + x_2$$

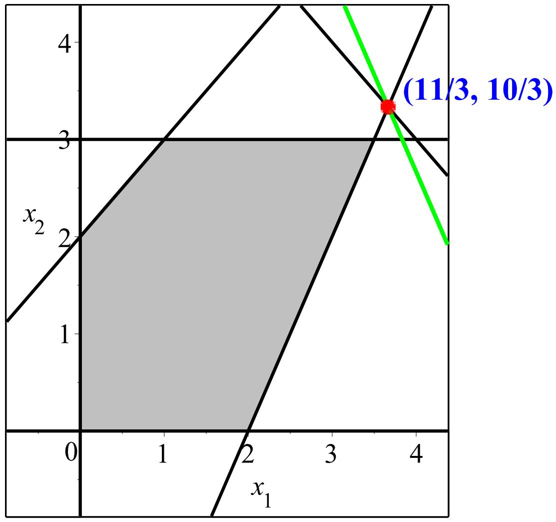
Optimális megoldása:

erzekenysegInput2c( ), *bazisChangeV*(u_3, x_1),
bazisChangeV(u_1, x_2) ;
bazisMegoldas( ), *celfvErtek*( );

$$\left[\begin{array}{cccc} 0 & x_1 & x_2 & b \\ u_1 & 1 & 1 & 7 \\ u_2 & -1 & 1 & 2 \\ u_3 & 2 & -1 & 4 \\ u_4 & 0 & 1 & 3 \\ -z & 2 & 1 & 0 \end{array}\right], \left[\begin{array}{cccc} 1 & u_3 & x_2 & b \\ u_1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 5 \\ u_2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 4 \\ x_1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ u_4 & 0 & 1 & 3 \\ -z & -1 & 2 & -4 \end{array}\right], \left[\begin{array}{cccc} 2 & u_3 & u_1 & b \\ x_2 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{10}{3} \\ u_2 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ x_1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{11}{3} \\ u_4 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -z & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{32}{3} \end{array}\right]$$

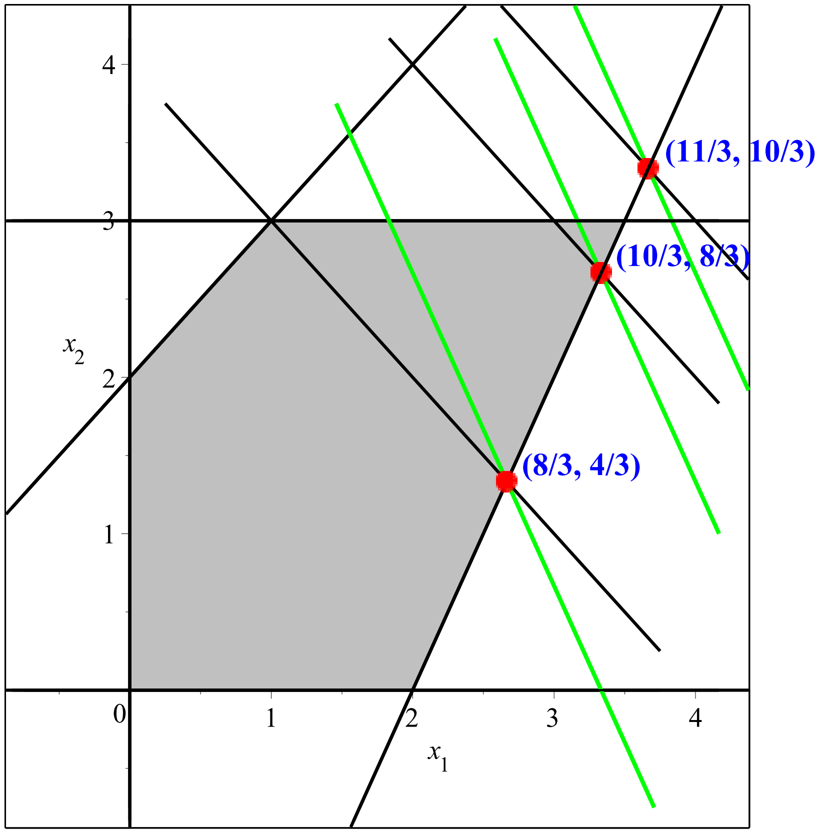
$$x_1 = \frac{11}{3}, x_2 = \frac{10}{3}, \text{"cél függvény : "}, z = \frac{32}{3} \qquad \textbf{(5.6)}$$

abra2dmodosult2 := *abra2d*( ) : *abra2dmodosult2*;



Láthatóan itt már az alkalmazott - nem megengedhet - báziscserékkel kiléptünk a megengedhet megoldások tartományából.
Mivel az (1)-es korlátozó feltétel már nem vesz részt a megengedhet megoldások tartományának kialakításában.
A jobb átláthatóság érdekében tegyük egymásra a három tartományt:

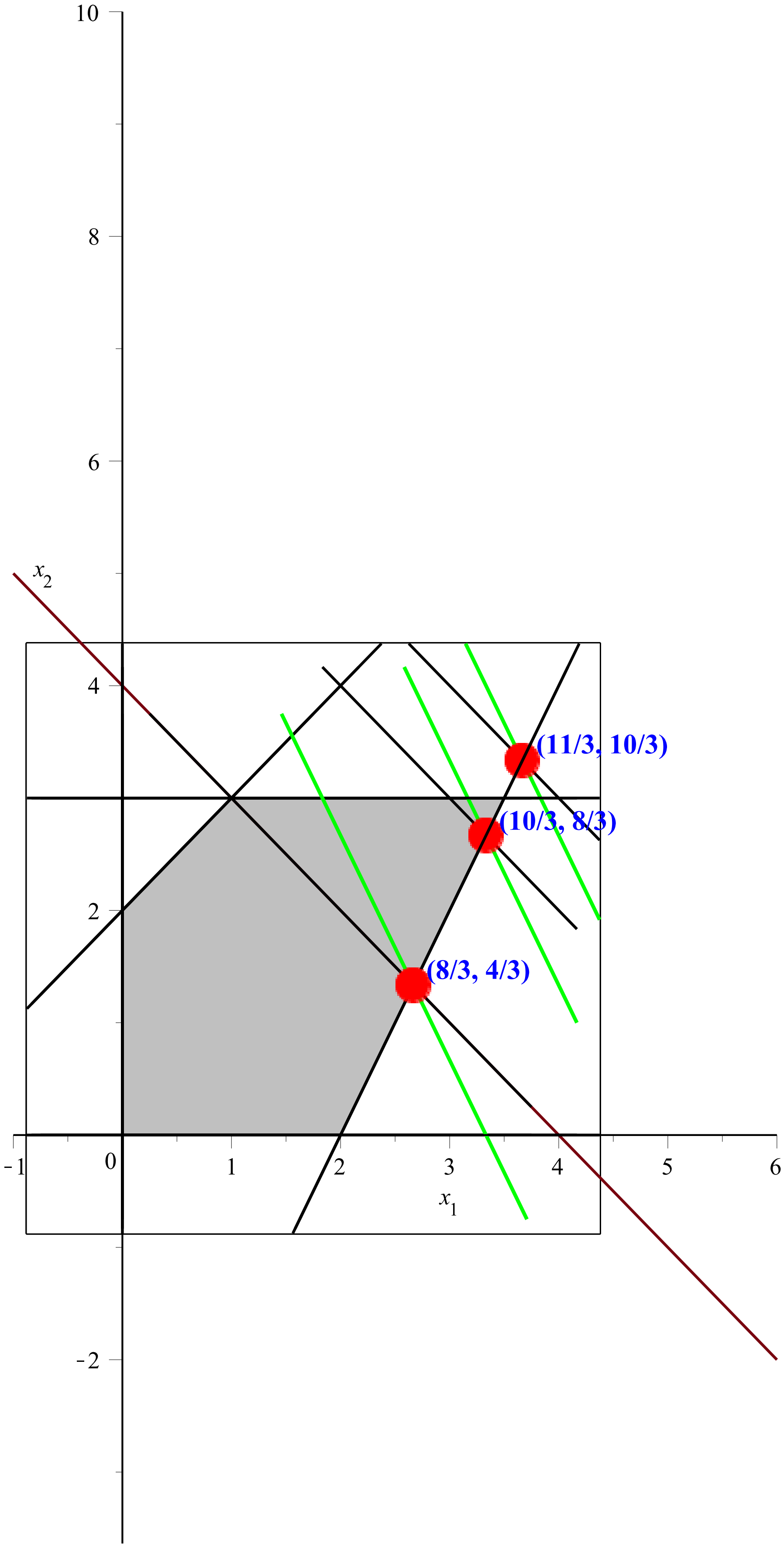
hatter ≔ *display*(*abra2dmodosult2*, *abra2dmodosult1*, *abra2deredeti*) :
hatter;



Próbáljuk meg a Maple - nem teljesen elégséges - animációs lehetségével megmutatni ezen b_1 növelési folyamatot.

$animate\left(plot, \left[\left(b1 - x_1\right), x_1 = -1..6, x_2 = -6..10\right], b1 = 4..7, trace = 4, frames = 10, background = hatter\right);$

$b1 = 4.$



Variáns számítás a célfüggvény együtthatókra

Eredeti feladatunkban a célfüggvény együtthatók értékei: $c_{eredeti} := [3, 7, 9]$:

Segédvektoraink ekkor $\underline{t}_{ac}^T = t_{ac} := [3, 0, 0]$: és $\underline{t}_{bc} = \quad t_{bc} := [9, 7, 0, 0]$:
$\underline{c}_{opt}^T = \underline{t}_{bc}^T - \underline{t}_{ac}^T * {}^T\underline{A}_o$

Most változtassunk meg a célfüggvény együtthatókat a kapacitás vektor értékeinek változatlanul hagyása mellett: Új értéke: $c_{uj} := [5, 9, 8]$:

Ekkor $\underline{t}_{ac}^T{}_{új} = [5, 0, 0]$: és $\underline{t}_{bc}^T{}_{új} = [8, 9, 0, 0]$:

(2*) formulánk alapján $\underline{c}_{opt}^T$ pedig:

$$\underline{c}_{opt}^T = \underline{t}_{bc}^T - \underline{t}_{ac}^T * {}^T\underline{A}_{opt} = [\,5\,,0\,,0\,] - [\,8\,,9\,,0\,,0\,] * \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & -2 \\ 11 & \frac{5}{3} & 0 \end{bmatrix} = [\,5 - -1/2 * 8 - 2 * 9\,)$$

, 0 - (-1/6 * 8 + 1/3 * 9) , 0 - (1/2 * 8)] =

[5 + 4 - 18 , 4/3 - 9/3 , - 8/2 - 14/6 , - 4.5] = - 9 , - 5/3 , - 4]

Megkaptuk az optimális tábla célfüggvény sorát. Ez lehetséget ad annak megállapítására, hogy a célfüggvény együttható változása után is optimális marad-e a táblánk. Vagyis, hogy ugyanazon termékszerkezet, ugyanazon gyártási terv jelenti-e továbbra is az optimalitást.

A kapacitás vektor komponenseinek érzékenység vizsgálata

Az ellenrzés módszerének változókra történ alkalmazása lehetvé teszi a megoldás elemzését is, azaz, hogy:

- a., hogyan módosíthatjuk a célfüggvény együtthatóit úgy, hogy az optimális megoldás ne változzon,
- b., meddig változtathatjuk a kapacitás vektor komponenseit, hogy az optimális megoldás bázisa ne változzék.

Mindkét esetben egy vizsgálatban egyetlen b_i vagy c_i paraméterre keressük a határokat, miközben

az összes többi paraméter az eredeti változatlan értéken marad.
Az ilyen jelleg vizsgálatokat nevezzük érzékenység vizsgálatnak, az elvet pedig "Ceteris Paribus" elvnek. (Amikor egyetlen változó hatását vizsgáljuk a többi változatlanul hagyása mellett.)
Ennek konkrét számítási megvalósítása az alábbin alapul.
Mivel $\underline{b}$ egyetlen Szimplex táblában sem mehet át negatívba, így az optimális táblában sem, így feltételünk az hogy csak addig változhat az eredeti kapacitás érték, amíg $\underline{b}_{opt}$ valamely komponense el nem éri a nullát. Vagyis $\underline{b}_{opt} \geq 0$.
Esetünkre az els fejezet végén már levezettük $\underline{b}_{opt}$ -t b_i- k függvényében, melynek koordinátás alakját írjuk most fel:

$$-\frac{1}{6}b_2 + \frac{1}{2}b_1 \geq 0$$

$$\frac{1}{3}b_2 \geq 0$$

$$\frac{1}{3}b_2 - 2\cdot b_1 + b_3 \geq 0$$

$$\frac{5}{3}b_2 + b_4 \geq 0$$

A "Ceteris Paribus" elvet alkalmazva eseteink rendre:
els, a.) $\underline{b}^T = [\ b_1\ , 12 , 28 , 15\ ]$
második b.) $\underline{b}^T = [\ 8\ , b_2\ , 28 , 15\ ]$
harmadik c.) $\underline{b}^T = [\ 8\ ,\ 12 , b_3 , 15\ ]$
negyedik d.) $\underline{b}^T = [\ 8\ ,\ 12 , 28 , b_4\ ]$

a.) b_1 - re: $\underline{b}^T = [\ b_1\ , 12 , 28 , 15\ ]$

Vagyis a b kapacitás vektort elször $\underline{b}^T = [\ b_1\ , 12 , 28 , 15\ ]$ -nek tekintjük és ezt helyettesítjük a fenti egyenltlenségekbe:

$$-\frac{1}{6}\cdot 12 + \frac{1}{2}\cdot b_1 \geq 0$$

$$\frac{1}{3}\cdot 12 \geq 0$$

$$\frac{2}{3}\cdot 12 - 2\cdot b_1 + 28 \geq 0$$

$$\frac{5}{3}\cdot 12 + 15 \geq 0$$

az els egyenltlenség megoldása b_1 -re:

$\frac{1}{2} \cdot b_1 \geq \frac{1}{6} \cdot 12$

$1/2*b_1 \geq 2$

$4 \leq b_1$

A második egyenltlenség nem tartalmaz b_1 változót,

A harmadik megoldása:

$8 + 28 \geq 2 \cdot b_1$

$36 \geq 2 \cdot b_1$

$b_1 \leq 18$

A negyedik ismételten nem tartalmaz változót.

A fenti tartományok közös része pedig:

$4 \leq b_1 \leq 18$

b.) b_2 - re: $\underline{b}^T = [\,8\,,\, b_2\,,\, 28\,,\, 15\,]$

b_2-t tekintjük változónak a többi kapacitás változót pedig az eredeti értéken.
Ezt helyettesítve egyenltlenségeinkbe az alábbiakat kapjuk:

$$-\frac{1}{6} \cdot b_2 + \frac{1}{2} \cdot 8 \geq 0$$

$$\frac{1}{3} \cdot b_2 \geq 0$$

$$\frac{2}{3} \cdot b_2 - 2 \cdot 8 + 28 \geq 0$$

$$\frac{5}{3} \cdot b_2 + 15 \geq 0$$

az els egyenltlenség megoldása b_2 -re:

$-\frac{1}{6} \cdot b_2 + \frac{1}{2} \cdot 8 \geq 0$

$\frac{1}{2} \cdot 8 \geq \frac{1}{6} \cdot b_2$ / * 6

$8*3 \geq b_2$

b

$_2 \leq 24$

A második egyenltlenség csak b_2 nem negativitását jelenti: $0 \leq b_2$
A harmadikból:

$$\frac{2}{3} \cdot b_2 \geq +2 \cdot 8 - 28$$
$$\frac{2}{3} \cdot b_2 \geq 16 - 28 = 12$$
$-12 * 3 \leq 2 * b_2 \quad / : 2$
$-36/2 \leq b_2$
$-18 \leq b_2$

A negyedik pedig $-9 \leq b_2$ következik, melyek nem jelentenek újat a nemnegativitási feltétel mellett.

A fenti tartományok közös része:

$0 \leq b_1 \leq 24$

c.) b_3 - ra: $\underline{b}^T = [\, 8 \,, \, 12 \,, b_3 \,, 15 \,]$

$$-\frac{1}{6} \cdot 12 + \frac{1}{2} \cdot 8 \geq 0$$

$$\frac{1}{3} \cdot 12 \geq 0$$

$$\frac{2}{3} \cdot 12 - 2 \cdot 8 + b_3 \geq 0$$

$$\frac{5}{3} \cdot 12 + 15 \geq 0$$

Sem az els sem a második, st a negyedik egyenltlenség sem tartalmaz b_3 változót. Csak a harmadik:
$$\frac{2}{3} \cdot 12 - 2 \cdot 8 + b_3 \geq 0$$
$$+b_3 \geq \frac{2}{3} \cdot 12 - 2 \cdot 8 = 8 - 16 = -8$$
$-8 \leq b_3$
Feladatunk megadásában azonban kikötöttük, hogy negatív kapacitás értéket nem fogadunk el. (Fizikailag nincs értelme negatív kapacitás korlátnak, pl. negatív munkaidnek, negatív pénzkeretnek, negatív anyagmennyiségnek.)
Így minden b_i - re a $0 \leq b_i$ feltétel része a feltételi egyenleteinknek. Mely szűkebb mint a kapott $-8 \leq$

b_3 Vagyis eredményünk:
$0 \le b_3$

d.) b_4 - re: $\underline{b}^T$= [8 , 12 , 28 , b_4]

$$-\frac{1}{6}\cdot 12 + \frac{1}{2}\cdot 8 \ge 0$$

$$\frac{1}{3}\cdot 12 \ge 0$$

$$\frac{2}{3}\cdot 12 - 2\cdot 8 + 28 \ge 0$$

$$\frac{5}{3}\cdot 12 + b_4 \ge 0$$

Csak a 4. egyenlet tartalmaz b_4-et.

$$b_4 \ge -\frac{5}{3}\cdot 12$$
$$b_4 \ge -20$$

De mivel negatív értéket nem engedünk meg így $b_4 \ge 0$

Mivel Maple alapú tananyagunk lehetvé teszi, mutassuk meg hogyan számíthatóak ki ezek (sokkal egyszerbb kevésbé fáradtságosan LinearMultivariateSystem) Maple utasítás segítségével:

b_1 - re:

$$b1range := LinearMultivariateSystem\left(\left\{-\frac{1}{6}\cdot 12 + \frac{1}{2}\cdot b_1 \ge 0, \frac{2}{3}\cdot 12 - 2\cdot b_1 + 28 \ge 0\right\}, [b_1]\right);$$

$$\{[\{4 \le b_1, b_1 \le 18\}]\} \tag{7.1}$$

b_2 - re:
Külön-külön az egyes egyenltlenségek megoldásával: (csak bemutató céllal)

$$b21range := LinearMultivariateSystem\left(\left\{-\frac{1}{6}b_2 + \frac{1}{2}\cdot 8 \ge 0\right\}, [b_2]\right)$$
$$\{[\{b_2 \le 24\}]\} \tag{7.2}$$

$$b23range := LinearMultivariateSystem\left(\left\{\frac{1}{3}\cdot b_2 - 2\cdot 8 + 28 \ge 0\right\}, [b_2]\right)$$
$$\{[\{-36 \le b_2\}]\} \tag{7.3}$$

$b24range := LinearMultivariateSystem\left(\left\{\frac{5}{3}\cdot b_2 + 15 \geq 0\right\}, [b_2]\right)$

$$\{[\{-9 \leq b_2\}]\} \quad \textbf{(7.4)}$$

Illetve az összes egyenltlenség együttes megoldásával:

$b2range := LinearMultivariateSystem\left(\left\{-\frac{1}{6}b_2 + \frac{1}{2}\cdot 8 \geq 0, b_2 \geq 0, \frac{2}{3}\cdot b_2 \geq 0, \frac{1}{3}\cdot b_2 - 2\cdot 8 + 28 \geq 0, \frac{5}{3}\cdot b_2 + 15 \geq 0\right\}, [b_2]\right);$

$$\{[\{0 \leq b_2, b_2 \leq 24\}]\} \quad \textbf{(7.5)}$$

c.) b_3 - ra: $\underline{b}^T$= [8 , 12 , b_3 , 15]

b_3 csak egyetlen egyenltlenségben szerepel:

$b3range := LinearMultivariateSystem\left(\left\{\frac{2}{3}\cdot 12 - 2\cdot 8 + b_3 \geq 0\right\}, [b_3]\right);$

$$\{[\{8 \leq b_3\}]\} \quad \textbf{(7.6)}$$

b_4 - re:

Mely szintén csak egy egyenltlenségben szerepel:

$b4range := LinearMultivariateSystem\left(\left\{\frac{5}{3}\cdot 12 + b_4 \geq 0\right\}, [b_4]\right);$

$$\{[\{-20 \leq b_4\}]\} \quad \textbf{(7.7)}$$

Eredményeinket egyetlen táblázatban foglalhatjuk össze az alábbiakban:

	Min	*Max*
b_1	4	18
b_2	0	24
b_3	8	∞
b_4	0	∞

Érdekelhet még bennünket, hogy az adott határokon a célfüggvény milyen értékeket vesz fel. Ennek meghatározásához a 3. állításunk nyújt segítséget.

$$- z_{opt} = \underline{c}_{opt}^{T} * \underline{t}_{fb}$$

Ezt is mindegyik "Ceteris Paribus" esetre ki kell külön-külön számítani.

$\underline{c}_{opt}^{T}$ minden esetben azonos, az optimális táblabeli célfüggvény sorban álló elemek alkotják:

$$\underline{c}_{opt}T = \left[-\frac{13}{2}, -\frac{5}{6}, -\frac{9}{2}\right]$$

$\underline{t}_{fb}$ azonban - mivel éppen a b_i - ket tartalmazza - minden esetünkben más:

a.) b_1 - re: $\underline{b}^T = [\, b_1 , 12 , 28 , 15 \,]$

b_{1min} - nál: $\underline{t}_{fb}{}^T = [\, 0 , 12 , b_{1min}]$ ahol $b_{1min} = 4$

$$-z_{optb1min} = \begin{bmatrix} -\frac{13}{2} & -\frac{5}{6} & -\frac{9}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ b_{1\,min} \end{bmatrix} = 0 - \frac{5}{6} \cdot 12 - \frac{9}{2} \cdot b_{1\,min} = -10 - \frac{9}{2} \cdot 4 = -10 - 9 \cdot 2 = -28$$

b_{1max} - nál: $\underline{t}_{fb}{}^T = [\, 0 , 12 , b_{1max}]$ ahol $b_{1max} = 18$

$$-z_{optb1max} = \begin{bmatrix} -\frac{13}{2} & -\frac{5}{6} & -\frac{9}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ b_{1\,max} \end{bmatrix} = 0 - \frac{5}{6} \cdot 12 - \frac{9}{2} \cdot 18 = -10 - 9 \cdot 9 = -10 - 81 = -91$$

b.) b_2 - re: $\underline{b}^T = [\, 8 , b_2 , 28 , 15 \,]$

b_{2min} - nál: $\underline{t}_{fb}{}^T = [\, 0 , b_{1min} , 8 \,]$ ahol $b_{2min} = 0$

$$-z_{optb2min} = \begin{bmatrix} -\frac{13}{2} & -\frac{5}{6} & -\frac{9}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ b_{2\,min} \\ 8 \end{bmatrix} = 0 - \frac{5}{6} \cdot b_{2\,min} - \frac{9}{2} \cdot 8 = -\frac{5}{6} \cdot 0 - \frac{9}{2} \cdot 8 = -36$$

b_{2max} - nál: $\underline{t}_{fb}{}^T = [\, 0 , b_{2max} , 8 ,]$ ahol $b_{2max} = 24$

$$-z_{optb2max} = \begin{bmatrix} -\frac{13}{2} & -\frac{5}{6} & -\frac{9}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ b_{2\,max} \\ 8 \end{bmatrix} = 0 - \frac{5}{6} \cdot 24 - \frac{9}{2} \cdot 8 = -5 \cdot 4 - 9 \cdot 4 = -20 - 36 = -56$$

c.) b_3 - ra: $\underline{b}^T = [\, 8 , 12 , 15 , b3 \,]$

b_{3min} - nál: $\underline{t}_{fb}{}^T = [\, 0 , 12 , 8 \,]$ vagyis $\underline{t}_{fb}$ nem is függ b_3-tól !

$$-z_{optb3min} = \begin{bmatrix} -\frac{13}{2} & -\frac{5}{6} & -\frac{9}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ 8 \end{bmatrix} = 0 - \frac{5}{6} \cdot 12 - \frac{9}{2} \cdot 8 = -5 \cdot 2 - 9 \cdot 4 = -10 - 36 = -46$$

és b_{3max} - nál $-z_{optb3max}$ -ra is ugyan ez kapjuk. Ezen (46-os) érték az "eredeti" optimális táblában szerepl optimum érték. Ez természetes, hogy az eredeti optimális táblabeli értékeket kapjuk vissza, mivel a célfüggvény érték szempontjából olybá tnik, mintha nem módosítottuk volna (az ezt érint) input adatokat.

d.) b_4 - re: $\underline{b}^T$ = [8 , 12 , 15]

Itt is ugyanaz a helyzet mint b_3 esetén . Mind $-z_{optb4min}$ mind $-z_{optb4max}$ -ra az érték -46.

Most már táblázatunkat kiegészíthetjük ezen célfüggvény értékekkel:

	Min	*Max*	$Z_{\min}$	$Z_{\max}$
b_1	4	18	28	91
b_2	0	24	36	56
b_3	8	∞	46	46
b_4	0	∞	46	46

A célfüggvényegyütthatók érzékenység vizsgálata

Most kezeljük váltóként - rendre - a célfüggvényegyütthatókat a kapacitás vektor értékeinek (és a többi célfüggvény együttható) változatlanul hagyása mellett:

Eredeti értéke: $c_{eredeti} := [3, 7, 9]$:

Új értéke a) esetben: $c_{uj} := [5 , 7, 9]$:

(2*) -es formulánk $\underline{c}_{opt}^T$ - ra rendezve ekkor:

Ekkor $\underline{t}_{ac}^T = t_{ac} := [5, 0, 0]$: és $\underline{t}_{bc}$= $t_{bc} := [8, 9, 0, 0]$:

A (2*) formula alapján:

$$\underline{c}_{opt}^T = \underline{t}_{ac}^T - \underline{t}_{bc}^T * {}^T\underline{A}_{opt} = [5 , 0 , 0] - [9 , 7 , 0 , 0] * \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & -2 \\ 11 & \frac{5}{3} & 0 \end{bmatrix} =$$

= [5 + 1/2 * 9 - 2 * 7) , 0 - (-1/6 * 9 + 1/3 * 7) , 0 - (1/2 * 9)] =

= [9 - 9/2 , 9/6 - 14/6 , - 4.5] = [- 9/2 , - 5/6 , - 9/2]

Módosítható kidolgozott feladat kapacitás vektor komponenseinek Maple alapú érzékenység vizsgálatára

A feladat az alábbi módosítható Maple ablakban adható meg:

$-6\cdot x_1 + 2\cdot x_2 - 2\cdot x_3 + 4\cdot x_4 \le 24,$
$-4\cdot x_1 + x_2 + x_3 \le 12,$
$-2\cdot x_1 + 2\cdot x_2 - 6\cdot x_3 + 4\cdot x_4 \le 52$

$-24\cdot x_1 + 9\cdot x_2 - 17\cdot x_3 + 6\cdot x_4$

Beolvasás és báziscserék:

$erzekenysegInputTemp(\,)$:
$bazisChangeV(u_2, x_2), bazisChangeV(u_1, x_1), bazisChangeV(u_3, u_2)$:

Amennyiben már végeztünk vizsgálatot (ha sorrendben olvassuk az anyagot ez természetes) akkor változóink már értéket kaptak. Az ismételt vizsgálathoz ismételten változóvá kell ket alakítanunk erre szolgál az alábbi ciklus: (mely enterrel futtatandó)
Mj: Az unassign('b_2') utasítás, a már értéket kapott b_2 ismételt újra változóvá alakítását szolgálja.

```
Restart :
for i from 1 to n do
  unassign('b_i') :
end do:
```

Ekor az alábbi induló és optimális táblával rendelkez lineáris programozási normál feladatot kapjuk:

$$\begin{bmatrix} 0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ u_1 & -6 & 2 & -2 & 4 & 24 \\ u_2 & -4 & 1 & 1 & 0 & 12 \\ u_3 & -2 & 2 & -6 & 4 & 52 \\ -z & -24 & 9 & -17 & 6 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & u_1 & u_3 & x_3 & x_4 & b \\ x_1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -1 & 0 & 7 \\ x_2 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -4 & 2 & 33 \\ u_2 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 1 & -2 & 7 \\ -z & -\frac{15}{4} & -\frac{3}{4} & -5 & -12 & -129 \end{bmatrix}$$

A segédvektorok ekkor (Enterrel futtatandó!) :

(Újfeladat esetén ezek "kézzel" felülírással, módosítandók majd szintén enterrel futtatandók.)

$$tfb := \begin{bmatrix} b_1 \\ b_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}: \qquad tjb := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_2 \end{bmatrix}:$$

Els állításunk $\underline{b}_{opt} \geq \underline{0}$ aktuális alakja:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -4 & 2 \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_2 \end{bmatrix} > = \underline{0}$$

Koordinátásan:

$$-\frac{1}{4} \cdot b_1 + \frac{1}{4} \cdot b_3 \geq 0$$

$$-\frac{1}{4} \cdot b_1 + \frac{3}{4} \cdot b_3 \geq 0$$

$$-\frac{3}{4} \cdot b_1 + \frac{1}{4} \cdot b_3 + b_2 \geq 0$$

Maple utasítással (kiíratással) ellenrizve hogy a megfelel értékek találhatók-e a változókban:
(Enterrel futtatandó)
$b_1, b_2, b_3, b_4, tfb, tjb;$

$$b_1, b_2, b_3, b_4, \begin{bmatrix} b_1 \\ b_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_2 \end{bmatrix} \tag{9.1}$$

Az eljárás mely az egyenltlenségeket automatikusan megkonstruálja: *inequalityDisplayb*( );
(enterrel futtatandó)

inequalityDisplayb( );

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} b_1 + \frac{1}{4} b_3 \\ -\frac{1}{4} b_1 + \frac{3}{4} b_3 \\ -\frac{3}{4} b_1 + \frac{1}{4} b_3 + b_2 \end{bmatrix} \tag{9.2}$$

Vizsgálva a Ceteris Paribus eseteket:

a.) eset: b_1 - változó, $\underline{b}^T = [\, b_1 \;, 12 \,, 52 \,]$

Az egyenltlenség rendszer ekkor:

$$-\frac{1}{4}\cdot b_1 \quad + \frac{1}{4}\cdot 5\,2 \quad \ge \quad 0$$

$$-\frac{1}{4}\cdot b_1 \quad + \frac{3}{4}\cdot 52 \quad \ge \quad 0$$

$$-\frac{3}{4}\cdot b_1 \quad + \frac{1}{4}\cdot 52 + 12 \quad \ge \quad 0$$

Ezek közös nemnegativitási tartománya:

$$b_1 \le \frac{100}{3}$$

Z optimális b_1 minimumnál = 39
Z optimális b_1 maximumnál = 164

Fenti meghatározása Maple utasításokkal, eljárásokkal :

Elsként meg kell adni a kapacitások aktuális értékeit. (Most nem szükséges b_1-re az unassign('b_1') utasítás, mivel a beolvasáskor minden b_i-t változóvá alakítottunk. Ezért a kettskereszt eléírásával ezt inaktívvá tettük.)
Célszer utána bi-ket kiiratni, hogy lássuk ténylegesen milyen értéket vesznek fel.

```
# unassign('b1') :
b2 := 12 :
b3 := 52 :
b1, b2, b3;
```

$$b_1, 12, 52 \tag{9.3}$$

Az egyenltlenségek aktuális alakjának megkonstruálása:

```
inequalityDisplayb( );
```

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}\, b_1 + 13 \\ -\frac{1}{4}\, b_1 + 39 \\ -\frac{3}{4}\, b_1 + 25 \end{bmatrix} \tag{9.4}$$

Az egyenltlenségek közös részének kiszámítása (Maple utasítással, nem eljárással) :
(Új feladat esetén ide kézzel kell beírnunk az új, módosított egyenltlenségeket.)

$$b1Range := LinearMultivariateSystem\left(\left\{-\frac{1}{4}\cdot b_1 + 13 \geq 0,\ -\frac{1}{4}\cdot b_1 + 39 \geq 0, -\frac{3}{4}\cdot b_1 + 25 \geq 0\right\}, [b_1]\right)$$

$$\left\{\left[\left\{b_1 \leq \frac{100}{3}\right\}\right]\right\} \tag{9.5}$$

z $_{opt}$ számítása: a z $_{opt}$ = $\underline{c}_{opt}$ * $\underline{t}_{fb}$ képlettel,melyhez tfb-ben b1 aktuális értékének kell szerepelnie, elször b1 minimumánál, nullánál.

$b_1 := 0;$
$tfb;$

$$\begin{matrix} 0 \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 52 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \tag{9.6}$$

Z optimális számítása:

$zoptCalculationb(\ );$

$$\begin{bmatrix} -\frac{15}{4} & -\frac{3}{4} & -5 & -12 \end{bmatrix}, \text{"*"}, \begin{bmatrix} 0 \\ 52 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{"="}, \begin{bmatrix} 39 \end{bmatrix} \tag{9.7}$$

majd b_1 maximumnál

$b_1 := \frac{100}{3} :$

$zoptCalculationb(\ );$

$$\left[\begin{array}{cccc} -\frac{15}{4} & -\frac{3}{4} & -5 & -12 \end{array}\right], "*", \left[\begin{array}{c} \frac{100}{3} \\ 52 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right], "=", \left[\begin{array}{c} 164 \end{array}\right] \quad (9.8)$$

b.) eset: b_2 - változó $\underline{b}^T = [\ 24\ ,\ b_2\ ,\ 52\ ]$

Az egyenltlenség rendszer ekkor:

$$-\frac{1}{4}\cdot 24 \quad +\frac{1}{4}\cdot 52 \quad \geq \quad 0$$

$$-\frac{1}{4}\cdot 24 \quad +\frac{3}{4}\cdot 52 \quad \geq \quad 0$$

$$-\frac{3}{4}\cdot 24 \quad +\frac{1}{4}\cdot 52 + b_2 \quad \geq \quad 0$$

A tartomány meghatározása most csak egyetlen egyenltlenségbl történt:

$$5 \leq b_2$$

A célfüggvény értékek a határokon:
z b_2 minimumnál = 129
z b_2 maximumnál = 129
(Mivel u_2 nem vett részt a báziscserében, így z optimális nem függ tle.)

A fenti számítás Maple utasításokkal, eljárásokkal:

Az aktuális kapacitás értékek megadása:
Az unassign('b_2') utasítás biztosítja most, hogy b_2-t ismét változóként kezelje a program - mivel az elzekben már értéket adtunk neki.

$b_1 := 24 :$
$unassign('b_2') :$
$b_3 := 52 :$
$b_1, b_2, b_3;$

$$24, b_2, 52 \quad (9.9)$$

Az egyenltlenség rendszer aktuális alakja:

$inequalityDisplayb(\ );$

$$\left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right] \leq \left[\begin{array}{c} 7 \\ 33 \\ -5 + b_2 \end{array}\right] \quad (9.10)$$

Az egyenltlenség rendszer megoldása:

$b2Range := LinearMultivariateSystem(\{-5 + b_2 \geq 0\}, [b_2]);$

$$\{[\{5 \leq b_2\}]\} \tag{9.11}$$

Z optimális számításához t_{fb}-t kell megadnunk b2 minimum értékénél.

$b_2 := 5 :$

$zoptCalculationb(\ );$

$$\left[\begin{array}{cccc} -\frac{15}{4} & -\frac{3}{4} & -5 & -12 \end{array}\right], \text{"*"}, \left[\begin{array}{c} 24 \\ 52 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right], \text{"="}, \left[\ 129\ \right] \tag{9.12}$$

Mivel t_{fb}-ben nem szerepel b_2. Ezért kaptuk vissza az eredeti célfüggvény értéket. A maximumnál is ugyanezt kapnánk.

c.) b_3 - változik: $\underline{b}^T$ = [24 , 12 , b3]

Az egyenltlenség rendszer ekkor:

$$\begin{array}{lcl} -\frac{1}{4}\cdot 24 \quad + \frac{1}{4}\cdot b_3 & \geq & 0 \\ -\frac{1}{4}\cdot 24 \quad + \frac{3}{4}\cdot b_3 & \geq & 0 \\ -\frac{3}{4}\cdot 24 \quad + \frac{1}{4}\cdot b_3 + b_2 & \geq & 0 \end{array}$$

A további számítások, most már csak Maple eljárásokkal, utasításokkal.
Elször ismételten változóvá kell tennünk b_3-at valamint meg kell adni b_2-t. (Mj:Ismét megadjuk az összes kapacitás vektort.)

$b_1 := 24 :$
$b_2 := 12 :$
$unassign('b_3') :$
$b_1, b_2, b_3;$

$$24,\ 12,\ b_3 \tag{9.13}$$

Az egyenltlenségrendszer aktuális alakja:

$inequalityDisplayb(\ );$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -6 + \frac{1}{4}\, b_3 \\ -6 + \frac{3}{4}\, b_3 \\ -6 + \frac{1}{4}\, b_3 \end{bmatrix} \tag{9.14}$$

Az egyenltlenség rendszer megoldása:

$b3Range := LinearMultivariateSystem\left(\left\{-6 + \frac{1}{4} \cdot b_3 \geq 0,\ -6 + \frac{3}{4} \cdot b_3 \geq 0, -6 + \frac{1}{4} \cdot b_3 \geq 0\right\},\ [b_3]\right);$

$$\{[\{24 \leq b_3\}]\} \tag{9.15}$$

Z optimális számításához ismételten t_{fb}-ben az aktuális b_3 minimum értéknek kell szerepelnie.

$b_3 := 24 :$
$tfb;$

$$\begin{bmatrix} 24 \\ 24 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{9.16}$$

$zoptCalculationb(\ );$

$$\begin{bmatrix} -\frac{15}{4} & -\frac{3}{4} & -5 & -12 \end{bmatrix}, \text{"*"}, \begin{bmatrix} 24 \\ 24 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{"="}, \begin{bmatrix} 108 \end{bmatrix} \tag{9.17}$$

majd b_3 maximum értékénél:

$b_3 := \infty :$

$zoptCalculationb(\ );$

$$\begin{bmatrix} -\frac{15}{4} & -\frac{3}{4} & -5 & -12 \end{bmatrix}, \text{"*"}, \begin{bmatrix} 24 \\ \infty \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{"="}, \begin{bmatrix} \infty \end{bmatrix} \tag{9.18}$$

Eredményeinket táblázatban összefoglalva:

	Min	*Max*	$Z_{\min}$	$Z_{\max}$
b_1	0	$\frac{100}{3}$	39	164
b_2	5	∞	129	129
b_3	24	∞	108	∞

Amennyiben minden b_i -t ismételten változónak tekintünk, akkor a kiszámított tartományok változói ("biRange") itt együtt kiirathatóak:

for i **from** 1 **to** n **do**
$unassign('b_i')$:
end do:
$b1Range, b2Range, b3Range$;

$$\left\{\left[\left\{b_1 \leq \frac{100}{3}\right\}\right]\right\}, \{[\{5 \leq b_2\}]\}, \{[\{24 \leq b_3\}]\} \quad \textbf{(9.19)}$$

z optimális értékeit nem tároltuk változókban, igy kiiratásuk most nem lehetséges. (Ez is megoldható lenne.)

Módosítható kidolgozott feladat a célfüggvényegyütthatók érzékenység vizsgálatára

Vissza kell térnünk az eredeti feladat értékeihez, melyet úgy tehetünk meg legegyszerbben, hogy ismételten beolvassuk. (A fenti fejezet elején található ablakból, csak az utasítást írjuk le ide ismét.)

for i **from** 1 **to** n **do**
\# $unassign('c_i')$:
end do:
$erzekenysegInputTemp(\ )$;
$bazisChangeV(u_2, x_2), bazisChangeV(u_1, x_1), bazisChangeV(u_3, u_2)$;

$$\begin{bmatrix} 0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ u_1 & -6 & 2 & -2 & 4 & 24 \\ u_2 & -4 & 1 & 1 & 0 & 12 \\ u_3 & -2 & 2 & -6 & 4 & 52 \\ -z & -24 & 9 & -17 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & x_1 & u_2 & x_3 & x_4 & b \\ u_1 & 2 & -2 & -4 & 4 & 0 \\ x_2 & -4 & 1 & 1 & 0 & 12 \\ u_3 & 6 & -2 & -8 & 4 & 28 \\ -z & 12 & -9 & -26 & 6 & -108 \end{array}\right], \left[\begin{array}{cccccc} 2 & u_1 & u_2 & x_3 & x_4 & b \\ x_1 & \frac{1}{2} & -1 & -2 & 2 & 0 \\ x_2 & 2 & -3 & -7 & 8 & 12 \\ u_3 & -3 & 4 & 4 & -8 & 28 \\ -z & -6 & 3 & -2 & -18 & -108 \end{array}\right], \tag{10.1}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 3 & u_1 & u_3 & x_3 & x_4 & b \\ x_1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -1 & 0 & 7 \\ x_2 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -4 & 2 & 33 \\ u_2 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 1 & -2 & 7 \\ -z & -\frac{15}{4} & -\frac{3}{4} & -5 & -12 & -129 \end{array}\right]$$

Most a (2*) állítás kisebb egyenl nulla formáját használjuk: $\underline{c}_{opt}^{T} = \underline{t}_{ac}^{T} - \underline{t}_{bc}^{T} * {}^{T}\underline{A}_{opt} \le 0$

Határozzuk meg elször a segédvektorokat: (Enterrel futtatandó!) :
(Újfeladat esetén ezek "kézzel" felülírással, módosítandók majd szintén enterrel futtatandók.)

$tacT := \begin{bmatrix} 0 & 0 & c_3 & c_4 \end{bmatrix};$
$tbcT := \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & 0 \end{bmatrix};$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & c_3 & c_4 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & 0 \end{bmatrix} \tag{10.2}$$

Ellenrzésként kiíratva:
$c_1, c_2, c_3, c_4, n, m;$

$$c_1, c_2, c_3, c_4, 4, 3 \tag{10.3}$$

Majd a (2*)-ból adódó egyenltlenségeket, ha minden célfüggvény együtthatót (c_i - t) változónak tekintünk.

$$\frac{1}{4}c_1 + \frac{1}{4}c_2 \le 0$$

$$-\frac{1}{4}c_1 - \frac{3}{4}c_2 \le 0$$

$$c_3 + c_1 + 4c_2 \le 0$$

$$c_4 - 7c_1 - 33c_2 \le 0$$

Maple eljárással:

Először számítsuk ki a (2*) állítás aktuális alakját az "inequalityDisplayc();" utasítással. (Egyenltlenség megjelenítése c_i -kre) :

inequalityDisplayc( );

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4}c_1 + \frac{1}{4}c_2 \\ -\frac{1}{4}c_1 - \frac{3}{4}c_2 \\ c_3 + c_1 + 4c_2 \\ c_4 - 7c_1 - 33c_2 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{10.4}$$

Majd válasszuk szét a Ceteris Paribus eseteket:

a.) eset : $\underline{c}_{a.)}$ = [c_1, 9 , -17, 6]

$$\underline{c}_{opt} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -17 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_1 & 9 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -1 & 7 \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -4 & 33 \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 1 & 7 \end{bmatrix} \ge \underline{0}^T$$

Ebbl az egyenltlenség rendszer:

$$\frac{1}{4}c_1 + \frac{9}{4} \le 0$$

$$-\frac{1}{4}c_1 - \frac{27}{4} \le 0$$

$$19 + c_1 \le 0$$

$$-291 - 7c_1 \le 0$$

Melynek megoldása:

$$-27 \le c_1 \le -19$$

Ami a kapacitás vektorokra történt vizsgálódás után meglep, (ott nem engedtünk meg negatív értékeket) a célfüggvényegyütthatóra azonban ez megengedhet.

Számítsuk ki a célfüggvény értékeit az alsó és a fels határon, melyhez nemcsak az eredeti t_{fb}-re van szükségünk de $\underline{c}_{opt}$ újraszámolására $c_{1\,\min}$ - nál.

$$tfb := \begin{bmatrix} 24 \\ 52 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : \qquad c_{1\,\min} = -27 \quad \text{(a számításban félkövérrel szedve)}$$

$$\underline{c}_{opt} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -17 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{-27} & 9 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -1 & 7 \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -4 & 33 \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{9}{2} & 0 & -8 & -102 \end{bmatrix}$$

z_{opt} c_1 minimumnál:

$$-z_{opt} = \begin{bmatrix} -\frac{9}{2} & 0 & -8 & -102 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 24 \\ 52 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -108$$

$$\underline{c}_{opt} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -17 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{-19} & 9 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -1 & 7 \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -4 & 33 \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & -2 & 0 & -158 \end{bmatrix}$$

z_{opt} c_1 maximumnál:

$$-z_{opt} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & -2 & 0 & -158 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 24 \\ 52 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -164$$

Mindez Maple utasításokkal:

Először c-t kell megadnunk: c_1-et - ha már használtuk - ismét változóvá kell tennünk. (Ha nem és hibát jelez, akkor a # (ketts kereszt) jelet elétéve ezen utasítás nem hajtódik végre.)

unassign('c_1') :

$c_2 := 9 :$
$c_3 := -17 :$
$c_4 := 6 :$

A (2*) ($\underline{c}_{opt}{}^{T} = \underline{t}_{ac}{}^{T} - \underline{t}_{bc}{}^{T} * {}^{T}\underline{A}_{opt} \le 0$) egyenltlenség aktuális alakja.

inequalityDisplayc( );

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4}c_1 + \frac{9}{4} \\ -\frac{1}{4}c_1 - \frac{27}{4} \\ 19 + c_1 \\ -291 - 7c_1 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{10.5}$$

Az egyenltlenség megoldása: (Új feladat esetén ide kézzel kell beírnunk az új, módosított egyenltlenségeket.)

$$c1Range := LinearMultivariateSystem\left(\left\{\frac{1}{4}\cdot c_1 + \frac{9}{4} \le 0, -\frac{1}{4}\cdot c_1 - \frac{27}{4} \le 0, 19 + c_1 \le 0, -291 - 7\cdot c_1 \le 0\right\}, [c_1]\right);$$

$$\{[\{-27 \le c_1, c_1 \le -19\}]\} \tag{10.6}$$

Z optimális számításához nemcsak t_{fb}-t kell megadnunk hanem c_1 minimális (majd maximális) értékét is - c_1 értékének, (mivel azzal számol az eljárás) és c optimálist is újra kell számítani. (Enterrel futtatandók!)

$$c_1 := -27 : \quad tfb := \begin{bmatrix} 24 \\ 52 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} :$$

coptCalculation( );

$$\begin{bmatrix} -\frac{9}{2} & 0 & -8 & -102 \end{bmatrix} \tag{10.7}$$

copt;

$$\begin{bmatrix} -\frac{9}{2} & 0 & -8 & -102 \end{bmatrix} \tag{10.8}$$

Esetleg c opt megjelenítése ellenrzési céllal, hogy a fenti érték ténylegesen megegyezik-e az optimális táblabeli értékkel:

zoptCalculationc( );

$$\left[\begin{array}{cccc} -\frac{9}{2} & 0 & -8 & -102 \end{array}\right], "*", \left[\begin{array}{c} 24 \\ 52 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right], "\ ;\quad zopt = ", 108 \tag{10.9}$$

Mj: A számítás - z_{opt} - ra van (szimbolikusan) kiíratva, a végeredényben azonban (a ; pontos vessz jel után) ezt már mínusz -1 el szorozva jelenítjük meg.

c_1 maximumnál:

$c_1 := -19 :$

coptCalculation( ), *copt*;

$$\left[\begin{array}{cccc} -\frac{5}{2} & -2 & 0 & -158 \end{array}\right], \left[\begin{array}{cccc} -\frac{5}{2} & -2 & 0 & -158 \end{array}\right] \tag{10.10}$$

zoptCalculationc( );

$$\left[\begin{array}{cccc} -\frac{5}{2} & -2 & 0 & -158 \end{array}\right], "*", \left[\begin{array}{c} 24 \\ 52 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right], "\ ;\quad zopt = ", 164 \tag{10.11}$$

b.) eset : $\underline{c}_{b.)}$ = [- 24 , c_2 , -17, 6]

Ezt már csak Maple utasításokkal mutatjuk meg:

Először is meg kell adni a célfüggvény együtthatók értékeit,

$c_1 := -24 :$

unassign('c_2') :

$c_3 := -17 :$

$c_4 := 6 :$

Ellenrzés céljából írassuk is ki t_{ac}^T , t_{bc}^T és c komponenseit valamint t_{fb}--t is:

tacT, *tbcT*, c_1, c_2, c_3, c_4, *tfb*;

$$\left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & -17 & 6 \end{array}\right], \left[\begin{array}{ccc} -24 & c_2 & 0 \end{array}\right], -24, c_2, -17, 6, \left[\begin{array}{c} 24 \\ 52 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right] \tag{10.12}$$

Az egyenltlenségek aktuális alakjai:

inequalityDisplayc( );

$$\begin{bmatrix} -6+\frac{1}{4}\,c_2 \\ 6-\frac{3}{4}\,c_2 \\ -41+4\,c_2 \\ 174-33\,c_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{10.13}$$

Az egyenltlenségek közös részének számítása (enterrel futtatandó, új feladat esetén kézzel módosítandó) :

$c2Range := LinearMultivariateSystem\left(\left\{-6+\frac{1}{4}\cdot c_2 \leq 0, 6-\frac{3}{4}\cdot c_2 \leq 0, -41+4\cdot c_2 \leq 0, 174 - 33\cdot c_2 \leq 0\right\}, [c_2]\right);$

$$\left\{\left[\left\{8 \leq c_2, c_2 \leq \frac{41}{4}\right\}\right]\right\} \tag{10.14}$$

z optimális értékének számítása c_2 minimum értékénél,

$c_2 := 8 :$

coptCalculation( ), *copt*;

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & -9 & -90 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 & 0 & -9 & -90 \end{bmatrix} \tag{10.15}$$

zoptCalculationc( );

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & -9 & -90 \end{bmatrix}, \text{"*"}, \begin{bmatrix} 24 \\ 52 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{" ;   zopt = "}, 96 \tag{10.16}$$

Majd a maximumértéknél is:

$c_2 := \frac{41}{4} :$

coptCalculation( ), *copt*;

$$\begin{bmatrix} -\frac{55}{16} & -\frac{27}{16} & 0 & -\frac{657}{4} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{55}{16} & -\frac{27}{16} & 0 & -\frac{657}{4} \end{bmatrix} \tag{10.17}$$

zoptCalculationc( );

$$\left[\begin{array}{cccc} -\frac{55}{16} & -\frac{27}{16} & 0 & -\frac{657}{4} \end{array}\right], "*", \left[\begin{array}{c} 24 \\ 52 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right], " \quad ; \quad zopt = ", \frac{681}{4} \tag{10.18}$$

c.) eset : c_3 - változó $\underline{c}_{c.)}$ = [- 24 , 9 , c_3 , 6]

A célfüggvény együtthatók megadása:

$c_1 := -24$:
$c_2 := 9$:
unassign('c_3') :
$c_4 := 6$:

Megjelenítés ellenrzési céllal:
tacT, *tbcT*, c_1, c_2, c_3, c_4;

$$\left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & c_3 & 6 \end{array}\right], \left[\begin{array}{ccc} -24 & 9 & 0 \end{array}\right], -24, 9, c_3, 6 \tag{10.19}$$

Az egyenltlenségek aktuális alakjai:

inequalityDisplayc( );

$$\left[\begin{array}{c} -\frac{15}{4} \\ -\frac{3}{4} \\ c_3 + 12 \\ -123 \end{array}\right] \leq \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right] \tag{10.20}$$

Az egyenltlenségek közös részének számítása (enterrel futtatandó, új feladat esetén kézzel módosítandó) :

c3Range := *LinearMultivariateSystem*({ $c_3 + 12 \leq 0$}, [c_3]);

$$\{[\{c_3 \leq -12\}]\} \tag{10.21}$$

z optimális értékének számítása $c_2$minimum értékénél,
Mj: a minimum érték most $-\infty$ és a Maple alkalmas is ennek kezelésére. Azonban az itt jelentkez 0 * $-\infty$ számításra (határérték számítás esetén helyesen) az undefined (nem meghatározható) értéket adja. Pedig "tényleges" nullával szorozva ez nulla értéket kellene adjon. Ezért nem használjuk a $-\infty$ szimbólumot, hanem helyette egy nagyon nagy értéket. Ezt tesszük majd a továbbiakban is.

$c_3 := -1000000000000$:

coptCalculation( ), *copt*;

$$\left[\begin{array}{cccc} -\frac{15}{4} & -\frac{3}{4} & -999999999988 & -123 \end{array}\right], \left[\begin{array}{cccc} -\frac{15}{4} & -\frac{3}{4} & -999999999988 & -123 \end{array}\right] \tag{10.22}$$

zoptCalculationc( );

$$\left[\begin{array}{cccc} -\frac{15}{4} & -\frac{3}{4} & -999999999988 & -123 \end{array}\right], \text{"*"}, \left[\begin{array}{c} 24 \\ 52 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right], \text{" ;   zopt = ", } 129 \tag{10.23}$$

Majd a maximumértéknél is:
$c_3 := -12$:

coptCalculation( ), *copt*;

$$\left[\begin{array}{cccc} -\frac{15}{4} & -\frac{3}{4} & 0 & -123 \end{array}\right], \left[\begin{array}{cccc} -\frac{15}{4} & -\frac{3}{4} & 0 & -123 \end{array}\right] \tag{10.24}$$

zoptCalculationc( );

$$\left[\begin{array}{cccc} -\frac{15}{4} & -\frac{3}{4} & 0 & -123 \end{array}\right], \text{"*"}, \left[\begin{array}{c} 24 \\ 52 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right], \text{" ;   zopt = ", } 129 \tag{10.25}$$

Láthatóan az eredeti célfüggvény értéket kapjuk vissza - ami nem meglep, mivel x_3 nem vett részt a báziscserében.

d.) eset : c_4 - változó $\underline{c}_{d.)}$ = [- 24 , 9 , - 17 , c_4]

A célfüggvény együtthatók megadása:

$c_1 := -24$:
$c_2 := 9$:
$c_3 := -17$:
unassign('c_4') :

Megjelenítés ellenrzési céllal:
tacT, *tbcT*, c_1, c_2, c_3, c_4, *tfb*;

$$\left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & -17 & c_4 \end{array}\right], \left[\begin{array}{ccc} -24 & 9 & 0 \end{array}\right], -24, 9, -17, c_4, \left[\begin{array}{c} 24 \\ 52 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right] \tag{10.26}$$

Az egyenltlenségek aktuális alakjai:

inequalityDisplayc( );

$$\begin{bmatrix} -\frac{15}{4} \\ -\frac{3}{4} \\ -5 \\ c_4 - 129 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{10.27}$$

Az egyenltlenségek közös részének számítása (enterrel futtatandó, új feladat esetén kézzel módosítandó) :

$c4Range := LinearMultivariateSystem(\{ c_4 - 129 \leq 0\}, [c_4]);$

$$\{[\{c_4 \leq 129\}]\} \tag{10.28}$$

z optimális értékének számítása $c_2$minimum értékénél,

$c_4 := -100000000000 :$

$coptCalculation(\ ), copt;$

$$\begin{bmatrix} -\frac{15}{4} & -\frac{3}{4} & -5 & -100000000129 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{15}{4} & -\frac{3}{4} & -5 & -100000000129 \end{bmatrix} \tag{10.29}$$

$zoptCalculationc(\ );$

$$\begin{bmatrix} -\frac{15}{4} & -\frac{3}{4} & -5 & -100000000129 \end{bmatrix}, \text{"*"}, \begin{bmatrix} 24 \\ 52 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{" ;   zopt = "}, 129 \tag{10.30}$$

Majd a maximumértéknél is:
$c_4 := 129 :$

$coptCalculation(\ ), copt;$

$$\begin{bmatrix} -\frac{15}{4} & -\frac{3}{4} & -5 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{15}{4} & -\frac{3}{4} & -5 & 0 \end{bmatrix} \tag{10.31}$$

$zoptCalculationc(\ );$

$$\begin{bmatrix} -\frac{15}{4} & -\frac{3}{4} & -5 & 0 \end{bmatrix}, \text{"*"}, \begin{bmatrix} 24 \\ 52 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{" ;   zopt = "}, 129 \tag{10.32}$$

Láthatóan itt is az eredeti célfüggvény értéket kapjuk vissza - ez sem meglep, mivel x_4 sem vett részt a báziscserében.

Eredményeinket táblázatban összefoglalva:

	Min	*Max*	$Z_{\min}$	$Z_{\max}$
c_1	-27	-19	108	164
c_2	8	$\frac{41}{4}$	96	$-\frac{681}{4}$
c_3	$-\infty$	-12	129	129
c_4	$-\infty$	129	129	129

Kiíratva az eltárolt változókból:

```
for i from 1 to n do
  unassign('c[i]') :
end do:
c1Range, c2Range, c3Range, c4Range;
```

$$\{[\{-27 \le c_1, c_1 \le -19\}]\}, \left\{\left[\left\{8 \le c_2, c_2 \le \frac{41}{4}\right\}\right]\right\}, \{[\{c_3 \le -12\}]\}, \{[\{c_4 \le 129\}]\} \quad \mathbf{(10.33)}$$

```
for i from 1 to 4 do
   unassign('c[i]') :
end do:
```

A további vizsgálatok elkészítése céljából ismét változókká alakítva c-ket.

Összefoglalás

Az érzékenységvizsgálat témakörben megismerhettük:
- magának az érzékenység vizsgálatnak a fogalmát, (adott változó változtatásának hatása az "eredményre")
- alkalmaztuk a Ceteris Paribus elvet, (csak egy változót vizsgálunk a többi [eredeti értéken történ] lerögzítése mellett)
- a Szimplex módszer általános matematikai formalizmussal történ leírásának egy részletét.
- a módszerhez szükséges állításokat (tételeket) és ezek konstruktív bizonyításait.
- az algoritmust (a számítási eljárást) vagyis érzékenységvizsgálat normál LP feladatra történ elvégzésének módját.

Maple eljárásokat használhattunk a fáradtságos kézi részszámítások kiváltására.
Nem kaptunk azonban olyan eszközt mely a teljes számítási munkát elvégezné helyettünk.
Léteznek ilyenek például a leginkább közismert Excel programban is.
Azonban - egyrészt mivel ilyenek már léteznek, másrészt nem tartottuk volna didaktikusnak, (az oktatás, megértés szempontjából hasznosnak) - a számítások elvégzésének elvi, gyakorlati menetét továbbra is a hallgatóknak, felhasználóknak kell a kezében tartania.

Feladatbank

1. Végezzen érzékenység vizsgálatot az alábbi normál LP feladatra a kapacitásvektor minden komponensére.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &\leq 8 \\ x_2 + x_3 &\leq 12 \\ x_1 - x_2 + 4\cdot x_3 + x_4 &\leq 20 \end{aligned}$$

$$z = x_1 + x_2 + 3\cdot x_3 + 4\cdot x_4 = \max.$$

ahol $x_1, x_2, x_3\ x_4$ nem negatív

2. Végezzen érzékenység vizsgálatot az alábbi normál LP feladatra a kapacitásvektor minden komponensére.

x1 , x2 ≥ 0

$$\begin{aligned} 4\cdot x_1 + 6\cdot x_2 &\leq 6 \\ -2\cdot x_1 + 14\cdot x_3 &\leq 200 \\ x_1 + 4\cdot x_2 &\leq 120 \\ 4\cdot x_1 + 2x_2 &\leq 100 \end{aligned}$$

$$z = 100x_1 + 120x_2 = \max.$$

3. Végezzen érzékenység vizsgálatot az alábbi normál LP feladatra a kapacitásvektor minden komponensére.

x1 , x2 ≥ 0

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 20 \\ x_2 &\leq 10 \\ x_1 + 4x_2 &\leq 120 \\ 4x_1 + 2x_2 &\leq 100 \end{aligned}$$

$$z = (100 - t)x_1 + (120 - 3t)x_2 = \max.$$

ahol $x_1, x_2,$ nemnegatív

4. Végezzen érzékenység vizsgálatot az alábbi normál LP feladatra a kapacitásvektor minden komponensére.

x1 , x2 , x3 ≥ 0

2 x1 + 2 x2 $\leq$ 6
-2 x1 + 4 x3 $\leq$ 20
x2 + 2 x3 $\leq$ 10

z = x 1 - 2 x2 + 2 x3 = max.

5. Végezzen érzékenység vizsgálatot az alábbi normál LP feladatra a kapacitásvektor minden komponensére.

x1 , x2 , x3 ≥ 0

$$\begin{array}{l} x1 \quad + 5\ x3 \le 10 \\ -x1 + 2\ x2 \quad \le 4 \end{array}$$

$z = 4\ x1 + 2\ x2 + 5\ x3 = \max.$

6. Végezzen érzékenység vizsgálatot az alábbi normál LP feladatra a kapacitásvektor minden komponensére. □

$$x1,\ x2,\ x3,\ x4 \ge 0$$

$$\begin{array}{l} x1 + 5\ x3 + x4 \le 10 \\ -x1 + 2\ x2 + 2\ x4 \le 22 \end{array}$$

$z = 4\ x1 + 2\ x2 - 5\ x3 + 8\ x4 = \max.$

7. Végezzen érzékenység vizsgálatot az alábbi normál LP feladatra a célfüggvényegyüttható minden komponensére. □

$$x1,\ x2 \ge 0$$

$$\begin{array}{l} x1 + x2 \le 8 \\ x1 + 2\ x2 \le 13 \end{array}$$

$z = 4\ x1 + 2\ x2 = \max.$

8. Végezzen érzékenység vizsgálatot az alábbi normál LP feladatra a célfüggvényegyüttható minden komponensére. □

$$x1,\ x2 \ge 0$$

$$\begin{array}{l} x1 - x2 \le 8 \\ x1 + x2 \le 4 \end{array}$$

$z = 2\ x1 + 3\ x2 = \max.$

9. Végezzen érzékenység vizsgálatot az alábbi normál LP feladatra a célfüggvényegyüttható minden komponensére. □

$$x1,\ x2,\ x3 \ge 0$$

$$\begin{array}{l} 2\ x1 + 2\ x2 \quad \le 6 \\ -2\ x1 \quad + 4\ x3 \le 20 \\ \quad x2 + 2\ x3 \le 10 \end{array}$$

$z = 4\ x1 - 2\ x2 + 2\ x3 = \max.$

10. Végezzen érzékenység vizsgálatot az alábbi normál LP feladatra a kapacitásvektor és a célfüggvényegyüttható minden komponensére. □

$$x1,\ x2,\ x3 \ge 0$$

$$\begin{array}{l} 2\ x1 - x2 + x3 \le 24 \\ x1 + x2 \quad \le 40 \\ x1 \quad + 2\ x3 \le 20 \end{array}$$

$z = -3\ x1 + 2\ x2 + 3\ x3 = \max$

11. Végezzen érzékenység vizsgálatot az alábbi normál LP feladatra a kapacitásvektor valamely komponensére.

$$x1,\ x2,\ x3,\ x4 \ge 0$$

□ $3\ x1 + x2 - 2\ x3$ □ 40

$5 x_1 - 2 x_2 + 8 x_3 + 3 x_4 \quad 80$

$z = 5 x_1 + 2 x_2 + 10 x_3 - 2 x_4 = \max.$

12. Végezzen érzékenység vizsgálatot az alábbi normál LP feladatra a kapacitásvektor komponenseire.

$x_1, x_2 \geq 0$

$6 x_1 + 12 x_2 \quad 96$

$x_1 \leq 12$

$x_1 - 2 x_2 \quad 8$

$- x_1 + 2 x_2 \quad 16$

$z = 7 x_1 + 2 x_2 = \max.$

13. Végezzen érzékenység vizsgálatot az alábbi normál LP feladatra a kapacitásvektor els és a célfüggvényegyüttható utolsó komponensére.

$x_2, x_1, x_3, x_4 \geq 0$

$3 x_1 + x_2 - 2 x_3 \quad 40$

$5 x_1 - 3 x_2 + 8 x_3 + 3 x_4 \quad 60$

$z = 7 x_1 + 3 x_2 - 10 x_3 + 2 x_4 = \max.$

14. Végezzen érzékenység vizsgálatot az alábbi normál LP feladatra a kapacitásvektor els és a célfüggvényegyüttható utolsó komponensére.

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

$x_1 + 3 x_3 \leq 9$

$-4 x_1 + 4 x_2 + 2 x_3 \leq 12$

$z = -2 x_1 + 2 x_2 - 6 x_3 = \max$

15. Végezzen érzékenység vizsgálatot az alábbi normál LP feladatra a kapacitásvektor els és a célfüggvényegyüttható utolsó komponensére!

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

$x_1 + x_3 - x_4 \quad 10$

$2 x_2 - x_3 + 2 x_4 \quad 30$

$z = - 6 x_1 + 2 x_2 + x_3 + 4 x_4 = \max.$

16. Végezzen érzékenység vizsgálatot az alábbi normál LP feladatra a kapacitásvektor els és a célfüggvényegyüttható utolsó komponensére.

$x_1, x_2 \geq 0$

$x_1 + 6 x_2 \leq 24$

$-2 x_1 + 4 x_2 \leq 10$

$z = x_1 - 4 x_2 = \max$

17. Végezzen érzékenység vizsgálatot az alábbi normál LP feladatra a kapacitásvektor els és a célfüggvényegyüttható minden komponensére.

$x_1, x_2 \geq 0$

$x_1 \leq 4$

$x_1 + 2 x_2 \leq 8$

$z = 4x_1 - 2x_2 = \max$

18. Végezzen érzékenység vizsgálatot az alábbi normál LP feladatra a kapacitásvektor és a célfüggvényegyüttható egy-egy komponensére. □

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\begin{aligned} 2x_1 \quad + \quad x_3 &\leq 12 \\ -2x_2 + 4x_3 &\leq 40 \\ x_1 + 2x_2 \quad &\leq 20 \end{aligned}$$

$$z = 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = \max.$$

19. Végezzen érzékenység vizsgálatot az alábbi normál LP feladatra a kapacitásvektor és a célfüggvényegyüttható egy-egy komponensére. □

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\begin{aligned} 2x_1 \quad + \quad x_3 &\leq 6 \\ -2x_2 + 4x_3 &\leq 40 \\ x_1 + 2x_2 \quad &\leq 20 \end{aligned}$$

$$z = 24x_1 - 3x_2 + 7x_3 = \max.$$

20. Végezzen érzékenység vizsgálatot az alábbi normál LP feladatra a kapacitásvektor és a célfüggvényegyüttható egy-egy komponensére. □

$$x_1, x_2 \geq 0$$

□ $2x_1 + 8x_2 \leq 24$

□ $-x_1 + 4x_2 \leq 16$

$$z = x_1 - 6x_2 = \max.$$

21. Végezzen érzékenység vizsgálatot az alábbi normál LP feladatra a kapacitásvektor és a célfüggvényegyüttható minden komponensére. □

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\begin{aligned} 4x_1 + 6x_2 \quad &\leq 6 \\ -2x_1 \quad + 14x_3 &\leq 200 \\ x_2 + 2x_3 &\leq 10 \end{aligned}$$

$$z = 8x_1 - 2x_2 + 4x_3 = \max.$$

Irodalom jegyzék

Felhasznált irodalom:

Csernyák László - Jánosa András: Operációkutatás II. A gazdasági optimalizálás módszerei II. Budapest, 2004, Nemzeti Tankönyvkiadó Rt.

Frederick S. Hillier - Gerard J. Liebermann: Bevezetés az operációkutatásba LSI Oktatóközpont, Budapest, 1994.

K. Sydsaeter - P. Hammond: Matematika Közgazdászoknak, Aula Kiadó, Budapest, 1998.

Ferenczi Zoltán: Operációkutatás, Készült a HEFOP 3.3.1-1.-P.-2004-09-0102/1. pályázat támogatásával, 2006.

Példatár az operációkutatás II. tananyaghoz (Egyéni tanulást segítkidolgozott feladatok) Pénzügyi és Számviteli Fiskola Budapest 1996. F. Sz.: 243.

Programok